

Skript zum
MATHEMATISCHEN VORKURS
Wintersemester 2024/25

Fassung Stand 20. September 2024

3. Auflage 2024

Autor der dritten Auflage: Luka Thomé

2. Auflage 2022

Autor der zweiten Auflage: Luka Thomé

Besonderen Dank an Florian Frauen

1. Auflage 2021

Autoren der ersten Auflage:

Matthis Scholz

Nikolaus Betker

Maximilian Bur

Luna Cielibak

Luka Thomé (Leitung)

© Fachschaft MathPhysInfo

Im Neuenheimer Feld 205 (Mathematikon), Raum 01.301

69120 Heidelberg

Telefon: +49 6221 54 14 999

Fax: +49 6221 54 161 14 999

E-Mail: fachschaft@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Webseite: <https://mathphys.stura.uni-heidelberg.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort: Wie dieses Buch zu lesen ist

1 Logik

§1.1	Variablen und Terme	1
§1.2	Bausteine der Aussagenlogik	6
§1.3	Bausteine der Prädikatenlogik	10
§1.4	Zweiwertige Interpretationen	16
§1.5	Aufgabenvorschläge	21

2 Beweise

§2.1	Logisches Schließen	22
§2.2	Implikationen	25
§2.3	Äquivalenzen	27
§2.4	Und und Oder	35
§2.5	Quantoren	36
§2.6	Widerlegen	40
§2.7	Aus Falschem folgt Beliebigen	43
§2.8	Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten	44
§2.9	Aufgabenvorschläge	50

3 Mengen und Familien

§3.1	Mengen und Elemente	52
§3.2	Teilmengen	54
§3.3	Die leere Menge	57
§3.4	Die Potenzmenge	58
§3.5	Familien	60
§3.6	Operationen mit Mengen	62
§3.7	Aufgabenvorschläge	70

4 Abbildungen

§4.1	Grundlegendes	71
§4.2	Verketteten von Abbildungen	75
§4.3	Identität und Inklusion	77
§4.4	Bilder und Urbilder von Teilmengen	79
§4.5	Einschränkung von Definitions- und Wertebereich	81
§4.6	Injektiv, surjektiv, bijektiv	83
§4.7	Invertierbare Abbildungen	86
§4.8	Aufgabenvorschläge	90

5 Relationen

§5.1	Allgemeines	91
§5.2	Ordnungsrelationen	97
§5.3	Äquivalenzrelationen	105
§5.4	Aufgabenvorschläge	113

6 Verknüpfungen	
§6.1 Allgemeines	114
§6.2 Assoziativ- und Kommutativgesetz	116
§6.3 Monoide	119
§6.4 Mehr Notation	124
§6.5 Gruppen	129
§6.6 Aufgabenvorschläge	132
7 Ausblick auf die Analysis	
§7.1 Mehr über reelle Zahlen	133
§7.2 Abstand	136
§7.3 Zahlenfolgen	139
§7.4 Folgenkonvergenz	144
§7.5 Analytisches Arbeiten	147
§7.6 Aufgabenvorschläge	150
Anhang A Entstehungsprozess eines Beweises	151
Anhang B Mathematischer Jargon	156
Anhang C Formelsammlung Logik und Mengen	160
Anhang D Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	168
Literaturverzeichnis	171
Symbolverzeichnis	173
Index	175

Vorwort: Wie dieses Buch zu lesen ist

Gleich zu Beginn sei gesagt: die beiden Vorkurswochen sind vor allem dazu da, dass du Menschen kennenlernst, die Uni und die Stadt erkundest. Verbringe also besser nicht so viel Zeit mit diesem Skript!

Entgegen der Bezeichnung „Skript“ handelt es sich eigentlich schon um ein regelrechtes Lehrbuch. Dementsprechend ist es bei Weitem ausführlicher als die Vorträge, die du während des Vorkurses hören wirst. Es soll folgende Funktionen erfüllen:

1. Dir während der Zeit zwischen Schule und Studium zur selbständigen Vorbereitung auf die Uni-Mathematik dienen.
2. Dir während des Vorkurses ermöglichen, die Vorträge zu vertiefen.
3. Dir während des ersten Semesters als Nachschlagewerk mathematischer Grundlagen dienen.

Abschnitte, die ich für die Vorträge für ungeeignet halte, sind mit einem * markiert. Sie sollten von den Dozenten am ehesten im Vortrag ausgelassen werden. Zu den mit (L) markierten Aufgaben befindet sich eine Kontrolllösung im Anhang.

Weitere Tipps für die Lektüre:

- Anfänger neigen dazu, einen mathematischen Text ähnlich einem Roman von vorne bis hinten linear durchzulesen und sich an einer Stelle, die sie nicht verstehen, solange festzubeißen, bis die Aussage nachvollziehbar wird. Damit kannst du allerdings viel Zeit vergeuden. Wenn du mit einer Definition nichts anfangen kannst, versuche erstmal nicht, alle Details der Definition nachzuvollziehen, sondern lies dir die folgenden Beispiele durch, um ein Gespür dafür zu bekommen, worum es überhaupt gehen soll. Wenn dir der Sinn eines Satzes beim ersten Lesen nicht klar wird, überspringe seinen Beweis erstmal und schau dir an, welche Schlussfolgerungen aus dem Satz gezogen werden und wie seine Aussage durch die Beispiele illustriert wird. Bei der Lektüre eines Mathebuch-Kapitels sind die längeren Beweise meist, was ich zuletzt lese.
- Manche verlinkten Artikel sowie die als „Vorschau“ gekennzeichneten Abschnitte beinhalten Stoff, der noch zu fortgeschritten ist und der erst in späteren Semestern für dich Sinn ergeben wird. Ich habe diese Abschnitte und Links hinzugefügt, um dir eine Referenz an die Hand und eine Vorschau auf die Weitläufigkeit der Mathematik zu geben. Setz dich bloß nicht unter Druck, die verlinkten Texte nachzuvollziehen zu müssen!
- Dieses Skript wurde in \LaTeX geschrieben. Sofern es dein PDF-Viewer unterstützt, kannst du allerlei mögliche Referenzen und Hyperlinks (z.B. die Einträge des Inhaltsverzeichnisses) einfach anklicken, um zum verwiesenen Ort zu gelangen.

Nach sechs Jahren geht mein eigenes Studium nun zu Ende. Ich wünsche dir alles Gute für Deines!

Luka

September 2022

Vorwort von 2021

Das Skript zum mathematischen Vorkurs wurde zum Wintersemester 2021/2022 von Luka Thomé, Matthis Scholz, Nikolaus Betker, Maximilian Bur und Luna Cielibak grundlegend neu verfasst. Autoren der einzelnen Kapitel sind:

Kapitel 1 Logik – Luka Thomé

Kapitel 2 Beweise – Luka Thomé

Kapitel 3 Mengen und Familien – Matthis Scholz

Kapitel 4 Abbildungen – Nikolaus Betker, Luka Thomé

Kapitel 5 Relationen – Matthis Scholz

Kapitel 6 Folgen, Abstand und Grenzwerte – Maximilian Bur, Luka Thomé

Kapitel 7 Verknüpfungen – Luka Thomé

Wir wünschen euch zwei schöne Vorkurswochen, einen guten Start ins Studentenleben und hoffen, euch mit diesem Skript einen ersten Einblick in die Uni-Mathematik bieten zu können, der neugierig auf mehr macht.

Nikolaus, Max, Luna, Matthis, Luka

September 2021

Kapitel 1

Logik

In diesem Vortrag werden diejenigen sprachlichen Strukturen vorgestellt, die in der Mathematik verwendet werden, um Definitionen, Sätze und Beweise zu formulieren.

§1.1 Variablen und Terme

§1.1.1 **Definition (Objekte und Typen).** Es gibt keine strenge Definition dessen, was ein **mathematisches Objekt** sein soll. Darunter werden alle abstrakten Entitäten verstanden, mit denen sich Mathematiker beschäftigen, wie zum Beispiel die Zahl 5, die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ und der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ihnen ist gemein, dass sie nicht in der „Wirklichkeit“ existieren, sondern lediglich Gegenstand unserer Gedanken sind.

In der typentheoretischen Sichtweise wird jedes mathematische Objekt gedacht als von einem gewissen **Typ**, einer Sorte von Dingen, der es angehört. Beispielsweise sind 3 und π zwei Objekte vom Typ „reelle Zahl“ und „ $3X^2 + 1$ “ und „ $X - 5$ “ zwei Objekte vom Typ „reelles Polynom“. Oft können Objekte des einen Typs je nach Kontext auch als Objekte eines anderen Typs mitgedacht werden. Beispielsweise ist in der Mathematik jede ganze Zahl auch eine reelle Zahl und in der Informatik kann jeder *integer* zu einem *float* konvertiert werden. Es gibt ebenfalls keine einheitliche Definition dessen, was ein Typ sei. Zwar wird der Begriff in der *Typentheorie* formalisiert, dort ist er jedoch meist ein Grundbegriff, der nicht auf noch grundlegendere Begriffen aufbauend definiert wird.

§1.1.2 **Definition (Variable).** Eine **Variable** ist ein Zeichen, das als Platzhalter dient, an dessen Stelle Objekte eines gewissen Typs eingesetzt werden können. Letzterer heißt der *Typ der Variable*.

§1.1.3 **Notation.** Anstatt zu schreiben: „Ich verwende das Zeichen n als Variable vom Typ natürliche Zahl“, bedienen sich Mathematiker eines Konjunktivs¹ und schreiben schlicht:

„Sei n eine natürliche Zahl.“

In diesem Skript werden Variablen meist als kursive Buchstaben gedruckt. Ansonsten ist aber alles erlaubt: Großbuchstaben, Kleinbuchstaben, griechische Buchstaben usw. Beispielsweise können die folgenden Zeichen alle als Variablen verwendet werden:

$A, B, x, y, \gamma, \delta, \dots$

Prinzipiell kannst du jedes Zeichen als Variable verwenden, solange du vorher seinen Typ festlegst (z.B. „Seien x, y zwei reelle Zahlen“). Allerdings haben sich in der Mathematik Konventionen eingebürgert, die gewisse Zeichen mit gewissen Typen assoziieren, und die du befolgen solltest, um deinen Text für andere Mathematiker leichter lesbar zu machen. Zum Beispiel:

- Natürliche Zahlen werden meist mit den Buchstaben $m, n \dots$ bezeichnet.
- Reelle Zahlen mit den Buchstaben x, y, \dots

¹Um genau zu sein, eines *Jussivs*, der im Deutschen mit dem Konjunktiv formuliert wird.

- Abbildungen mit den Buchstaben f, g, \dots
- Mengen werden meist mit Großbuchstaben notiert und deren Elemente mit naheliegenden Kleinbuchstaben („Sei R eine Menge und seien $r, s \in R$ “).
- Aussagen (**Definition** §1.2.1) werden meist mit den Buchstaben A, B, \dots bezeichnet. In der englischen Literatur sind dagegen die Buchstaben P, Q, \dots gebräuchlich (P wie “proposition”).
- In der mathematischen Logik kommt es sogar vor, dass *Metavariablen* vom Typ „Variable“ auftauchen („Seien x, y zwei Variablen“).

Das alles sind aber keine strikten Regeln und du wirst mit der Zeit ein Gespür für guten Stil entwickeln.

§1.1.4 **Bemerkung.**

- Für das Einsetzen von Objekten für Variablen gelten folgende Grundsätze:
 - Gleiche Variablen bezeichnen gleiche Objekte. Bezeichnet beispielsweise x eine reelle Zahl, so wird in

$$x^2 - 2x$$

vorausgesetzt, dass an beiden Vorkommen von x dieselbe Zahl eingesetzt wird.

- In verschiedene Variablen darf dasselbe Objekt eingesetzt werden. Schreiben Mathematiker so etwas wie „Seien m, n zwei natürliche Zahlen“, so schließt dies auch den Fall mit ein, dass m und n dieselbe Zahl sein können. Andernfalls schreibe man so etwas wie „Seien m, n zwei *verschiedene* natürliche Zahlen“.
- (Variablen nie vom Himmel fallen lassen!) Erstsemester vergessen nicht selten, ihre Variablen sachgemäß einzuführen. Wann immer du eine Variable wie „ x “ oder „ A “ verwendest, solltest du, z.B. mit einem „Sei...“-Satz, ihren Typ klarstellen. Für die Tutoren ist es immer wieder nervig, wenn in Aufgabenlösungen plötzlich Buchstaben auftreten, für die nie klargestellt wurde, was sie zu bedeuten haben.

§1.1.5 **Definition** (*Cantorsche Mengendefinition*). Die Einführung des Mengenbegriffs in die Mathematik erfolgte durch Georg Cantor² in den 1870er Jahren. Cantor beschrieb seine Idee in [Can95] wie folgt:

„Unter einer **Menge** M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.“³

Die Formalisierung des Mengenbegriffs ist Aufgabe der *Mengenlehre*. Dort ist der Begriff der Menge meist ein Grundbegriff, der nicht auf anderen Begriffen aufbauend definiert wird.

²Georg Cantor (1845-1918)

³Eine (möglicherweise fiktive) Anekdote aus [Ded32], S. 449 beschreibt folgende „Veranschaulichungen“ des Mengenbegriffs:

Dedekind äußerte, hinsichtlich des Begriffes der Menge: er stelle sich eine Menge vor wie einen geschlossenen Sack, der ganz bestimmte Dinge enthalte, die man aber nicht sähe, und von denen man nichts wisse, außer dass sie vorhanden und bestimmt seien. Einige Zeit später gab Cantor seine Vorstellung einer Menge zu erkennen: Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick: „Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.“

Dedekinds Vorstellung kommt der des Durchschnittsmathematikers wohl näher.

§1.1.6 **Notation (Elementzeichen).** Sind M eine Menge und a ein Objekt, so schreibt man

$$\begin{array}{ll} a \in M & \text{für } a \text{ ist ein Element von } M \\ a \notin M & \text{für } a \text{ ist kein Element von } M \end{array}$$

§1.1.7 **Beispiel (Zahlbereiche).** Beispielsweise notiert man mit

- \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen (manchmal mit Null, manchmal ohne).
- \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen.
- \mathbb{Q} die Menge der rationalen Zahlen.
- \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen.
- \mathbb{C} die Menge der komplexen Zahlen.

Es gilt dann beispielsweise $-3 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, aber $-3 \notin \mathbb{N}$ und $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

§1.1.8 **Bemerkung (* Mengen vs. Typen).** Ähnlich wie in der Typentheorie jedes Objekt von einem bestimmten Typ ist, ist in der Mengenlehre jedes Objekt ein Element einer Menge. Die Mengenlehre ist in der Lage, gewisse Typentheorien zu emulieren, d.h. sie stellt ein Modell für den Begriff „Typ“ zur Verfügung. Man definiert dann schlicht: Ein Typ T ist eine Menge und ein Objekt vom Typ T ist ein Element der Menge T . Beispielsweise wird „ n ist ein Objekt vom Typ ganze Zahl“ im Mengen-Formalismus zu „ $n \in \mathbb{Z}$ “. Mathematiker bedienen sich dieser Sprache auch beim Einführen von Variablen: Anstelle von „Sei n eine ganze Zahl“ schreiben sie schlicht „Sei $n \in \mathbb{Z}$ “; oder anstelle von „Sei A eine reelle $(m \times n)$ -Matrix“ schreiben sie „Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ “.

Umgekehrt ist die Typentheorie in der Lage, die Mengenlehre zu emulieren. Hier ist dann „Menge“ schlicht ein Typ unter vielen, der gewissen Regeln unterliegt. Während Mathematiker meist typentheoretisch *denken*, dominiert im *Geschriebenen* die \in -Sprache der Mengenlehre und auch dieses Skript wird dieser Sprache folgen. Ihre Rolle als „Typen in spe“ ist erstmal die einzige, die Mengen in diesem Kapitel spielen werden. Die weiterführende Beschäftigung mit Mengen ist Inhalt von Kapitel 3.

§1.1.9 **Definition (Term).** Seien $n \in \mathbb{N}$ und x_1, \dots, x_n ein paar Variablen und T ein Typ. Ein **Term vom Typ T** in den Variablen x_1, \dots, x_n ist ein sprachliches Gebilde t , das, setzt man für jede der Variablen x_1, \dots, x_n jeweils ein konkretes Objekt ein, selbst ein konkretes Objekt vom Typ T bezeichnet. Um hervorzuheben, dass t ein Term in den Variablen x_1, \dots, x_n ist, schreibt man auch

$$t(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{(lies: „} t \text{ von } x_1, \dots, x_n \text{“)}$$

§1.1.10 **Beispiel.**

(1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist der Ausdruck

$$x^2 + 3xy - y^3$$

ein Term vom Typ „reelle Zahl“ in den Variablen x und y . Setzt man beispielsweise für x die Zahl 3 und für y die Zahl 2 ein, erhält man den Zahlenwert 19.

(2) Steht die Variable m für einen Menschen, so ist der Ausdruck „Das Geburtsjahr von m “ ein Term vom Typ „ganze Zahl“ in der Variable m . Setzt man für m einen konkreten Menschen ein, erhält man mit dessen Geburtsjahr eine ganze Zahl.

- (3) In **Definition** §1.1.9 ist auch $n = 0$ erlaubt, d.h. ein Term braucht nicht unbedingt Variablen enthalten. Beispielsweise sind die Ausdrücke

$$2 + 2 \qquad 6,02 \cdot 10^{23} \qquad (\text{Die Quersumme von } 420)$$

drei Terme vom Typ „reelle Zahl“, in denen keine Variablen vorkommen. Sie bezeichnen daher von vornherein eine konkrete reelle Zahl.

- (4) In einem Term in den Variablen x_1, \dots, x_n braucht nicht unbedingt auch jede dieser Variablen vorkommen. Beispielsweise kann „ $3x + y$ “ auch als „Term in den Variablen x, y, z “ verstanden werden, obwohl die Variable z gar nicht darin vorkommt.

§1.1.11 **Notation (Klammersetzung)**. Häufig lassen sich durch wiederholte Anwendung elementarer Operationen immer komplizierter verschachtelte Terme hervorbringen. Beispielsweise lässt sich in der Sprache der reellen Zahlen, mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot , der Term

$$(x_1 + (x_2 \cdot x_3)) + (x_4 \cdot ((x_5 + x_6) \cdot (x_7 + x_8)))$$

hinschreiben. Als weiteres Beispiel werden die aussagenlogischen Junktoren aus **Abschnitt** §1.2 den Aufbau verschachtelter Aussageterme ermöglichen.

Um deutlich zu machen, auf welche Weise ein Term aus kleineren Teiltermen zusammengebaut ist, bedient man sich **Klammern** und Konventionen wie der Regel „Punkt- vor Strichrechnung“, die vorschreiben, dass gewisse Operationen „stärker binden“ sollen als andere. Die wichtigste Ermächtigung zum Fortlassen von Klammern liefern die *Assoziativgesetze*, siehe dazu **Bemerkung** §6.2.5. Mit den gängigen Konventionen würde anstelle des obigen Terms geschrieben werden:

$$x_1 + x_2x_3 + x_4(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)$$

§1.1.12 **Notation ($:=$)**. Komplizierte Terme möchte man nicht jedes Mal erneut aufschreiben und führt neue Zeichen ein, um diese Terme abzukürzen. Dabei bedient man sich des Zeichens

$$:= \qquad (\text{lies: „ist definiert als“ oder „ist per Definition gleich“})$$

Beispielsweise wird mit der Formel

$$y(x) := 2x^2 - 3x$$

festgelegt, dass das Zeichen „ y “ fortan einen Term $y(x)$ bezeichne, nämlich „ $2x^2 - 3x$ “.

Der Term y braucht nicht unbedingt Variablen enthalten. Schreibt man beispielsweise

$$\alpha := \pi + e$$

so wird damit festgelegt, dass der Buchstabe α die Summe von π (der Kreiszahl) und e (der Eulerschen Zahl⁴) bezeichnen soll. Näherungsweise ist $\alpha \approx 5,86$. Bis heute ist unbekannt, ob α eine rationale oder eine irrationale Zahl ist.

§1.1.13 **Definition (*Variablensubstitution)**. Sei $t(x)$ ein Term in der Variablen x . Ist y ein weiterer Term, dessen Typ mit demjenigen der Variable x übereinstimmt, so kann y für die Variable x **eingesetzt** (oder auch: **substituiert**) werden. Der so entstandene Term wird notiert mit

$$t(y) \qquad (\text{lies: „}t \text{ von } y\text{“})$$

⁴Leonhard Euler (1707-1783)

§1.1.14 **Beispiel** (*).

- (1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sind $t(x) := x^2$ und $s(y) := y - 1$ zwei Terme vom Typ „reelle Zahl“. Setzt man für die Variable y den Term t ein, ergibt sich $s(t) = x^2 - 1$. Setzt man dagegen in t den Term s ein, ergibt sich $t(s) = (y - 1)^2$.
- (2) Substituieren wir im Term „Das Geburtsjahr von m “ für die Variable m den Term „die Mutter von m “, ergibt sich der Term „Das Geburtsjahr der Mutter von m “.
- (3) Für $x, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x \leq 1$ sind

$$y(x) := \sqrt{1 - x^2} \quad \text{und} \quad s := \sin(\varphi)$$

zwei Terme vom Typ „reelle Zahl“ mit $-1 \leq s \leq 1$. Substituieren wir für x den Term s , ergibt sich $y(s) = \sqrt{1 - \sin(\varphi)^2}$, was gleichwertig zu $|\cos(\varphi)|$ ist. Substitutionen dieser Art sind dir vielleicht von der *Integration durch Substitution* aus der Schule vertraut.

§1.1.15 **Bemerkung** (*Parameter). Manchmal enthält ein Term Variablen, die nicht dazu intendiert sind, Objekte an ihre Stelle einzusetzen, oder die hinsichtlich Einsetzen von Objekten eine geringere Priorität als andere Variablen haben. Man spricht dann gelegentlich von **Parametern**. Schreibt man beispielsweise

$$y(x) := x^2 - ax$$

so wäre dies eigentlich ungenau, weil der Term $y(x)$ ja neben x auch noch die Variable a enthält. Stattdessen soll deren Unterdrückung in der Notation darauf hinweisen, dass sie als Parameter angesehen wird. Zur Präzisierung könnte man auch sowas wie „ $y_a(x)$ “ schreiben. In der Schule ist dir dieses Vorgehen bereits bei Funktionenscharen begegnet.

§1.1.16 **Vorschau** (*Currying⁵). Fassen wir y als Funktionsterm auf (siehe **Notation** §4.1.4), können wir y sowohl als Funktion „in zwei Variablen“, die a und x die Zahl $x^2 - ax$ zuordnet, verstehen, als auch als funktionenwertige Funktion, die a die Funktion $y_a(x)$ zuordnet. Beide Betrachtungsweisen lassen sich per **Currying** ineinander überführen.

§1.1.17 **Notation** (*Gebundene Variablen). Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte einmal den Term

$$y(x) := 2x^2 + 3x + 1$$

Dies ist ein Term in der Variablen x , in den für x eine beliebige reelle Zahl eingesetzt werden kann. Zum Beispiel wäre $y(-2) = 3$. Im Term

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x + 1) dx$$

ist dies nicht mehr der Fall. Hier ergäbe es keinen Sinn mehr, für das Zeichen x irgendein Objekt einzusetzen. Ein Ausdruck wie etwa „ $\int_0^1 (2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1) d4$ “ wäre syntaktisch unzulässig.

Obwohl man x in diesem Kontext die Integrationsvariable nennt, handelt es sich nicht um eine Variable im Sinne von **Definition** §1.1.2, sondern nur noch um ein „Dummy-Zeichen“, das darauf hinweist, über welche Variable integriert wird. Man nennt x in dieser Situation eine **gebundene Variable**. Weitere Situationen, die solche Dummy-Variablen involvieren, sind die Laufvariablen unterm Summenzeichen

⁵Haskell Curry (1900-1982)

(**Notation** §6.4.12), der Folgenindex bei einer Limesbildung (**Definition** §7.4.2), Variablen, die durch Anwendung eines Quantors gebunden werden (**Bemerkung** §1.3.14), das „generische Element“ in der Extension einer Eigenschaft (**Definition** §3.1.4) oder in einer Abbildungsvorschrift (**Notation** §4.1.4):

$$\sum_{k=1}^m (k^2 - 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \quad \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist eine Primzahl}\} \quad n \mapsto n+1$$

Hier wären k, n, x, p die gebundenen Variablen. Um gebundene Variablen von den eigentlichen Variablen im Sinne von **Definition** §1.1.2 abzugrenzen, nennt man letztere auch **freie Variablen**. Ein Term kann durchaus mehrere gebundene und freie Variablen zugleich enthalten: Der Term $\sum_{k=1}^m (k^2 - 2)$ enthält neben der gebundenen Variable k auch noch die freie Variable m und der Term

$$\int_0^z e^{-cx^2} dx$$

enthält neben einer gebundenen Variable x auch noch die freien Variablen z und c (wobei letztere je nach Kontext als Parameter behandelt wird, worauf bereits der Buchstabe c wie “constant” hinweist).

§1.2 Bausteine der Aussagenlogik

§1.2.1 **Definition (Aussage)**. Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, dem ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

§1.2.2 **Beispiel**. Parallel zur abstrakten Theorie werden uns in diesem Paragraphen die folgenden Beispielaussagen begleiten:

B_1 := „Der Döner wurde in Deutschland erfunden.“

B_2 := „Heute ist Mittwoch.“

B_3 := „Es gibt außerirdisches Leben.“

B_4 := „Der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“

B_5 := „Die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“

Nicht jeder deutsche Satz ist eine Aussage. Sätze, die eher nicht als Aussagen durchgehen würden, sind zum Beispiel:

„Frohe Weihnachten!“

„Was möchten Sie trinken?“

„Ein großes Bier, bitte!“

§1.2.3 **Definition (Junktor)**. Eine systematische Operation, die aus einer Handvoll Aussagen eine neue Aussage hervorbringt, heißt **Junktor** oder auch **logischer Operator**.

Es werden nun die gebräuchlichen Junktoren vorgestellt.

§1.2.4 **Definition (Und-Verknüpfung).** Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Konjunktion**

$$A \wedge B \quad (\text{lies: „A und B“})$$

verknüpft werden, deren intendierte Bedeutung ist, dass sowohl A als auch B zutreffen.

§1.2.5 **Beispiel.** Beispiele für Konjunktionen sind etwa:

$$B_2 \wedge B_4 = \text{„Heute ist Mittwoch und der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“}$$

$$B_3 \wedge B_5 = \text{„Es gibt außerirdisches Leben, aber die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“}$$

$$B_1 \wedge B_5 = \text{„Obwohl der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist die Relativitätstheorie fehlerhaft.“}$$

An den Beispielen wird deutlich, dass die Konjunktion zweier Aussagen nicht immer durch das Wort „und“ erfolgen braucht.

§1.2.6 **Definition (Oder-Verknüpfung).** Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Disjunktion**

$$A \vee B \quad (\text{lies: „A oder B“})$$

verknüpft werden, deren intendierte Bedeutung ist, dass mindestens eine der Aussagen A und B zutrifft.

§1.2.7 **Beispiel.** Beispiele für Disjunktionen sind:

$$B_1 \vee B_3 = \text{„Der Döner wurde in Deutschland erfunden oder es gibt außerirdisches Leben.“}$$

$$B_2 \vee B_5 = \text{„Heute ist Mittwoch oder die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“}$$

$$B_4 \vee B_4 = \text{„Der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde oder der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“}$$

§1.2.8 **Bemerkung (Fachbegriffe).** Du brauchst dir im Vorkurs nicht gleich alle Fachbegriffe zu merken. Sofern du weißt, dass es eine Und- und eine Oder-Verknüpfung gibt, brauchst du dir nicht merken, dass sie auch „Konjunktion“ und „Disjunktion“ genannt werden. In diesem und den folgenden Kapiteln werde ich dennoch oft mehrere Wörter für dasselbe Konzept nennen, um dir das Nachschlagen der Begriffe in Literatur und Internet zu erleichtern.

§1.2.9 **Bemerkung (* Ausschließendes Oder).** Die Disjunktion bezeichnet ein *einschließendes Oder*, d.h. $A \vee B$ schließt auch den Fall ein, dass A und B beide gelten. In einer Mathematiker-Beziehung würde das Ultimatum „Ich – oder deine dummen Fernsehserien!“ keine Besorgnis erregen. Das „oder“ lässt ja auch zu, dass beides vorliegen kann. Möchtest du ein ausschließendes Oder verwenden, kannst du dies mit

$$A \dot{\vee} B \quad (\text{lies: „Entweder A oder B“})$$

notieren. Das „Entweder A oder B “ soll soviel wie „ A oder B aber nicht beides“ bedeuten. Das Ultimatum „Entweder ich oder deine dummen Fernsehserien“ könnte selbst bei einem Mathematiker-Pärchen eine handfeste Beziehungskrise auslösen.

Junktor	Formelzeichen	Latein	Bezeichnung in der Informatik
Oder	\vee	vel	OR
Ausschließendes Oder	$\dot{\vee}$	aut	XOR

§1.2.10 **Beispiel (*)**. Beispielsweise ist

„Eine natürliche Zahl ist entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl.“

eine korrekte Aussage, während

„Jeder Vorkursteilnehmer studiert entweder Mathematik oder Informatik.“

falsch ist, da manche ja auch beides studieren.

§1.2.11 **Definition (Negation)**. Für eine Aussage A wird mit

$$\neg A \quad (\text{lies: „nicht } A\text{“})$$

die *Negation* von A notiert. $\neg A$ ist die Verneinung von A , d.h. $\neg A$ soll besagen, dass A nicht zutrifft. Manchmal wird die Negation einer Aussage A auch mit einem Oberstrich notiert: \overline{A} .

§1.2.12 **Beispiel**. Beispiele für Negationen sind:

$\neg B_1 =$ „Der Döner wurde nicht in Deutschland erfunden.“

$\neg B_2 =$ „Heute ist nicht Mittwoch.“

$\neg B_3 =$ „Es gibt kein außerirdisches Leben.“

$\neg B_4 =$ „Der FC Bayern spielte keine schlechte Hinrunde.“

$\neg B_5 =$ „Die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

§1.2.13 **Definition (Implikationspfeil)**. Zwei Aussagen A, B können zur („materiellen“) **Implikation**

$$A \rightarrow B \quad (\text{lies: „} A \text{ impliziert } B\text{“})$$

verknüpft werden: Deren intendierte Bedeutung ist, dass B von A impliziert wird. Weitere Lesarten sind unter Anderem:

- „ B folgt aus A “
- „ B ist eine Konsequenz von A “
- „Wenn A , dann B “
- „ A ist eine hinreichende Bedingung für B “
- „ B ist eine notwendige Bedingung für A “

Der Pfeil „ \rightarrow “ heißt **Implikationspfeil** und die Aussage $A \rightarrow B$ ein **Konditional**.

§1.2.14 **Beispiel**. Beispiele für \rightarrow -Aussagen sind:

$B_1 \rightarrow B_5 =$ „Wenn der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist die Relativitätstheorie fehlerhaft.“

$B_2 \rightarrow B_4 =$ „Sofern der FC Bayern eine schlechte Hinrunde spielte, ist heute Mittwoch.“

$B_3 \rightarrow B_5 =$ „Gibt es außerirdisches Leben, so ist die Relativitätstheorie fehlerhaft.“

§1.2.15 **Bemerkung.** Beachte, dass es beim Implikationspfeil „ \rightarrow “ wesentlich auf die Reihenfolge ankommt. Während sich etwa die Aussagen $A \wedge B$ und $B \wedge A$ nicht in ihrer Bedeutung unterscheiden, sind $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zwei grundlegend verschiedene Aussagen. Beispielsweise sind

(1) „Wenn heute Freitag ist, ist morgen Wochenende.“

(2) „Falls morgen Wochenende ist, ist heute Freitag.“

zwei wesentlich verschiedene Aussagen. Aussage (1) ist korrekt, aber Aussage (2) ist falsch, da ja auch Samstag sein könnte.

§1.2.16 **Definition (Äquivalenz).** Zwei Aussagen A und B lassen sich zur **Äquivalenz**

$$A \leftrightarrow B \quad (\text{lies: „}A \text{ äquivalent zu } B\text{“})$$

verknüpfen, deren intendierte Bedeutung ist, dass sich A und B gegenseitig implizieren. Lesarten dafür sind:

- „ A genau dann wenn B “. Ist wenig Platz vorhanden, schreibt man abkürzend „ A gdw. B “. Im Englischen schreibt man „ A iff B “.
- „ A gilt dann und nur dann, wenn B “

Der Doppelpfeil „ \leftrightarrow “ heißt **Äquivalenzpfeil** und die Aussage $A \leftrightarrow B$ ein **Bikonditional**.

§1.2.17 **Beispiel.** Beispiele für Äquivalenzaussagen sind:

- „Genau dann ist heute Mittwoch, wenn morgen Donnerstag ist.“
- „Eine reelle Zahl x ist dann und nur dann negativ, wenn $-x$ positiv ist.“

$B_1 \leftrightarrow B_3 =$ „Dass der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist äquivalent dazu, dass es außerirdisches Leben gibt.“

§1.2.18 **Bemerkung (*Die Pfeile \rightarrow und \Leftrightarrow).** Für Implikation und Äquivalenz sind sowohl die einfachen Pfeile \rightarrow , \Leftrightarrow als auch die doppelten Pfeile \Rightarrow , \Leftrightarrow gebräuchlich.

Gelegentlich werden verschachtelte Aussagen übersichtlicher, wenn die doppelten Pfeile zur Darstellung von Implikationen, die „eine Ebene höher“ liegen, verwendet werden. So mache ich es zum Beispiel in **Axiom** §5.1.2.

In der mathematischen Logik können beide Pfeilarten verwendet werden, um rigoros zwischen Implikationen auf der „Objektebene“ und solchen auf der „Metaebene“ zu unterscheiden; oder um zwischen „syntaktischer Implikation“ und „semantischer Implikation“ zu unterscheiden. Abseits der Logik sind diese Unterscheidungen aber überflüssig und es gibt, auch wenn manche Profs meinen, ihre Hörer auf ihre Privatnotation einschwören zu müssen, keine eindeutige Vorschrift, ob und wie zwischen „ \rightarrow “ und „ \Rightarrow “ unterschieden werden müsse. Benutze einfach den Pfeil, der dir besser gefällt.

§1.2.19 **Bemerkung (Verschachtelte Aussageterme).** Im Sinne von **Notation** §1.1.11 erlauben die Junktoren die Konstruktion beliebig kompliziert verschachtelter Aussagen. Wie z.B. $(B_1 \vee \neg B_2) \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5)$:

„Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde oder heute nicht Mittwoch ist, gibt es außerirdisches Leben und die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

oder $B_1 \vee (\neg B_2 \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5))$:

„Der Döner wurde in Deutschland erfunden oder aber es gilt: wenn heute nicht Mittwoch ist, gibt es außerirdisches Leben und die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

Möchtest du Klammern vermeiden, kannst du verschieden große Leerstellen zwischen den Zeichen lassen:

$$B_1 \vee \neg B_2 \rightarrow B_3 \wedge \neg B_5$$

$$B_1 \vee \neg B_2 \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5)$$

Es gibt auch Konventionen, die, ähnlich der Regel „Punkt- vor Strichrechnung“, die Erstaufführung gewisser Junktoren vor anderen Junktoren regeln. Man legt dann z.B. fest, dass \wedge „stärker binde“ als \rightarrow . Solche Konventionen solltest du nur dann stillschweigend verwenden, wenn du dir sicher bist, dass dein Leser dieselbe Konvention auch kennt und benutzt.

§1.2.20 **Vorschau** (* weitere Junktoren). Prinzipiell können unendlich viele weitere Junktoren definiert werden. Hinsichtlich der bivalenten Interpretationen aus [Definition §1.4.2](#) gibt es jedoch bis auf semantische Äquivalenz nur 16 zweistellige. Darunter:

- Der Sheffer-Strich⁶ „ $A \mid B$ “ („Nicht sowohl A als auch B “). In der Informatik spricht man von der *NAND-Verknüpfung*.
- Die Peirce-Funktion⁷ „ $A \downarrow B$ “ („Weder A noch B “). In der Informatik spricht man von der *NOR-Verknüpfung*.

NAND und NOR besitzen die besondere Eigenschaft, dass sich in der Schaltalgebra jeder andere Junktor **allein aus NAND's** oder **allein aus NOR's** zusammenbauen lässt. In dieser Hinsicht sind sie für die technische Informatik von großer Bedeutung. In der Mathematik sind sie jedoch weit weniger wichtig als die anderen Junktoren.

§1.3 Bausteine der Prädikatenlogik

§1.3.1 **Definition** (*Prädikat*). Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein **n -stelliges Prädikat** ist ein Term vom Typ „Aussage“ in n -vielen Variablen.

- 1-stellige Prädikate heißen auch **Eigenschaften**. Sprechen Mathematiker schlicht von „Prädikaten“, so meinen sie in der Regel einstellige Prädikate.
- Ist $n \geq 2$, so spricht man auch von **n -stelligen Relationen**. Sprechen Mathematiker einfach nur von „Relationen“, so meinen sie in der Regel zweistellige Relationen.
- Ein 0-stelliges Prädikat ist schlicht eine Aussage.

§1.3.2 **Beispiel**. Beispiele für einstellige Prädikate, also für Eigenschaften:

- (1) $E(m) : \Leftrightarrow$ „ m ist eine gerade Zahl“, wobei $m \in \mathbb{N}$. Setzt man hier für die Variable m beispielsweise die Zahlen 4 und 5 ein, erhält man die Aussagen „4 ist eine gerade Zahl“ und „5 ist eine gerade Zahl“.

⁶Henry Maurice Sheffer (1882-1964)

⁷Charles Sanders Peirce (1839-1914)

- (2) $D(X) : \Leftrightarrow$ „ X wurde in Deutschland erfunden“, wobei sich die Variable X auf kulinarische Errungenschaften beziehen soll. Setzt man hier für die Variable X das Objekt „Der Döner“ ein, erhält man die Aussage „Der Döner wurde in Deutschland erfunden“. Setzt man dagegen das Objekt „Die Pizza“ ein, erhielte man die Aussage „Die Pizza wurde in Deutschland erfunden“.
- (3) $M(x) : \Leftrightarrow$ „ x ist der größte Mathematiker“, wobei die Variable x vom Typ „MathematikerIn“ sei. Setzt man hier für die Variable x das Objekt „Alexander Grothendieck“ ein, erhält man die Aussage „Alexander Grothendieck ist der größte Mathematiker“. Dagegen ergäbe es keinen Sinn, für x das Objekt „Der Döner“ einzusetzen.

Ich habe hier, um eine Eigenschaft mit einem Buchstaben zu bezeichnen, nicht das Symbol „:=“ sondern das Symbol „: \Leftrightarrow “ verwendet. Bei der Definition von Aussagen und Prädikaten kommt das schonmal vor, du könntest aber genausogut auch immer „:=“ schreiben. Ist Geschmackssache.

§1.3.3 **Beispiel.** Zweistellige Prädikate sind zum Beispiel:

- (1) „ x ist kleiner als y “, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Diese Relation lässt sich auch kompakt als Formel $x < y$ notieren.
- (2) $A(X, Y) : \Leftrightarrow$ „ X ist älter als Y “, wobei für die Variablen konkrete Menschen eingesetzt werden sollen.
- (3) $L(X, Y) : \Leftrightarrow$ „ X liebt Y “, wobei die Variablen vom Typ „Figur aus Mozarts ‘Die Hochzeit des Figaro’“ seien.

Viele weitere Beispiele werden in Kapitel 5 untersucht.

§1.3.4 **Notation** (*Extension einer Eigenschaft*). Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann wird mit

$$\{x \mid E(x)\} \quad (\text{lies: „Menge aller } x, \text{ für die gilt: } E(x)\text{“})$$

die Menge all derjenigen Objekte (vom Typ der Variablen x), die die Eigenschaft E besitzen, bezeichnet. Sie heißt die **Extension** (oder auch „Umfang“ oder „Ausdehnung“) des Prädikats E . Das Zeichen x wird hierbei zu einer gebundenen Variable im Sinne von **Notation** §1.1.17.

Manche Autoren schreiben anstelle des Querstrichs \mid einen Doppelpunkt: $\{x : E(x)\}$.

§1.3.5 **Beispiel.** Beispielsweise ist $\{M \mid M \text{ ist ein Mensch}\}$ die Menge aller Menschen und $\{p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ die Menge aller Primzahlen. Manchmal schreibt man auch nur so etwas wie „ $\{\text{Menschen}\}$ “ und „ $\{\text{Primzahlen}\}$ “, und spart sich den Umweg über die gebundene Variable.

§1.3.6 **Vorschau** (**Eigenschaften vs. Teilmengen*). Sei $E(x)$ eine Eigenschaft und X die Menge aller Objekte vom Typ der Variablen x . Dann ist die Extension $M := \{x \mid E(x)\}$ eine sogenannte *Teilmenge*⁸ von X , d.h. jedes Element der Menge M ist auch ein Element der Menge X . Umgekehrt lässt sich für jede Teilmenge N von X die Eigenschaft $E(x) : \Leftrightarrow x \in N$ formulieren. Auf diese Weise hat man eine wechselseitige Beziehung zwischen Eigenschaften und Teilmengen. Es handelt sich hierbei um einen Aspekt der Dualität zwischen Syntax und Semantik. Mehr dazu in **Bemerkung** §5.1.18.

⁸siehe **Definition** §3.2.1

Quantoren

§1.3.7 **Definition (Allaussage).** Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Allaussage**

$$\forall x : E(x) \quad (\text{lies: „Für jedes } x \text{ gilt } E(x)\text{“})$$

formen, deren intendierte Bedeutung ist, dass *jedes* Objekt (vom Typ der Variablen x) die Eigenschaft E besitzt.

Ist M eine Menge von Objekten (vom Typ der Variablen x), so definiert man

$$\forall x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \rightarrow E(x))$$

(lies: „Für jedes x aus M gilt $E(x)$ “)

was bedeuten soll, dass jedes Element der Menge M die Eigenschaft E besitzt.

Das Zeichen \forall heißt **Allquantor**.

§1.3.8 **Beispiel.** Beispiele für Allaussagen:

- (1) Sind M die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) : \Leftrightarrow$ „ m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\forall m \in M : A(m)$, dass jeder in meiner WG heute früh aufgestanden ist.
- (2) Sind \mathbb{P} die Menge aller Primzahlen und $U(p) : \Leftrightarrow$ „ p ist eine ungerade Zahl“, so bezeichnet $\forall p \in \mathbb{P} : U(p)$ die (falsche) Aussage, dass jede Primzahl eine ungerade Zahl ist.

§1.3.9 **Definition (Existenzaussage).** Für eine Eigenschaft $E(x)$ lässt sich die **Existenzaussage**

$$\exists x : E(x) \quad (\text{lies: „Es gibt ein } x, \text{ für das } E(x) \text{ gilt“})$$

formen, deren intendierte Bedeutung ist, dass *mindestens ein* Objekt (vom Typ der Variablen x) die Eigenschaft E besitzt.

Ist M eine Menge von Objekten (vom Typ der Variablen x), so definiert man

$$\exists x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \exists x : (x \in M \wedge E(x))$$

(lies: „Es gibt ein x in M , für das $E(x)$ gilt“)

was bedeuten soll, dass mindestens ein Element der Menge M die Eigenschaft E besitzt.

Das Zeichen \exists heißt **Existenzquantor**.

§1.3.10 **Beispiel.** Beispiele für Existenzaussagen:

- (1) Sind M die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) : \Leftrightarrow$ „ m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\exists m \in M : A(m)$, dass mindestens einer in meiner WG heute früh aufgestanden ist.
- (2) Sind \mathbb{P} die Menge aller Primzahlen und $U(p) : \Leftrightarrow$ „ p ist eine ungerade Zahl“, so bezeichnet $\exists p \in \mathbb{P} : U(p)$ die (wahre) Aussage, dass es mindestens eine Primzahl gibt, die ungerade ist.

§1.3.11 **Notation.** Die Negation einer Existenzaussage notiert man mit dem Zeichen \nexists . Das heißt, anstelle von „ $\neg(\exists x : E(x))$ “ schreibt man

$$\nexists x : E(x) \quad (\text{lies: „Es existiert kein } x, \text{ für das } E(x) \text{ gilt“})$$

Ebenso schreibt man $\nexists x \in M : E(x)$ anstelle von $\neg(\exists x \in M : E(x))$.

Für den Allquantor hat diese Notation kein Pendant. So etwas wie „ \nforall “ ist meiner Erfahrung nach nicht gebräuchlich.

§1.3.12 **Beispiel.** Im Beispiel von gerade eben hieße „ $\nexists m \in M : A(m)$ “, dass in meiner WG heute niemand früh aufgestanden ist.

§1.3.13 **Beispiel (Syllogistik).** Die Prädikatenlogik ist in der Lage, die Satzformen der *Syllogistik*, der vorherrschenden Logik im europäischen Mittelalter, zu formalisieren. Für ein Beispiel seien

$$\begin{aligned} M &:= \{x \mid x \text{ ist ein Mensch}\} \\ G &:= \{x \mid x \text{ ist ein Gott}\} \\ H(x) &:\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist ein Grieche“} \\ S(x) &:\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist sterblich“} \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun folgende Aussagen formulieren:

$$\begin{aligned} \forall x \in M : S(x) & \quad \text{„Alle Menschen sind sterblich“} \\ \exists x \in M : H(x) & \quad \text{„Einige Menschen sind Griechen“} \\ \exists x \in M : \neg H(x) & \quad \text{„Einige Menschen sind keine Griechen“} \\ \nexists x \in G : S(x) & \quad \text{„Keine Götter sind sterblich“} \end{aligned}$$

§1.3.14 **Bemerkung (Variablen mit Quantoren binden).** In Formeln wie „ $\exists x : x(x+1) = 2$ “ oder „ $\forall x : x^2 \geq 0$ “ ist das Zeichen x eine gebundene Variable im Sinne von **Notation §1.1.17**. Man sagt auch: „die Variable wird durch den Quantor gebunden“.

Es lassen sich nicht nur Eigenschaften zu Aussagen reduzieren, sondern allgemein n -stellige Prädikate zu $(n-1)$ -stelligen Prädikaten. Die Anwendung eines Quantors reduziert die Anzahl der freien Variablen um Eins. Beispielsweise wird das für reelle Zahlen x, y formulierte zweistellige Prädikat

$$x < y$$

durch Binden der Variable x zu

$$\exists x : x < y$$

In dieser Formel sind nun x eine gebundene Variable und y eine freie Variable, es liegt also ein einstelliges Prädikat vor. Dieses kann zu einer Aussage gemacht werden, indem man wahlweise für y ein konkretes Objekt einsetzt, wie z.B. „ $\exists x : x < 3$ “, oder aber auch y mit einem Quantor bindet, wie z.B. in

$$\forall y : \exists x : x < y$$

Jedes n -stellige Prädikat kann zu einer Aussage gemacht werden, indem jede der Variablen wahlweise durch ein konkretes Objekt ersetzt oder aber durch einen Quantor gebunden wird.

§1.3.15 **Notation (Schreibkonvention bei mehreren Quantoren).** Verwende ich mehrere Quantoren unmittelbar hintereinander, schreibe ich den Doppelpunkt oft nur hinter den letzten Quantor:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y : x < y & \quad (\text{lies: „Für jedes } x \text{ gibt es ein } y, \text{ für das } x < y \text{ gilt“}) \\ \exists y \forall x : x < y & \quad (\text{lies: „Es gibt ein } y \text{ derart, dass für alle } x \text{ gilt: } x < y \text{“}) \end{aligned}$$

Einige Autoren lassen die Doppelpunkte hinter Quantoren auch ganz weg.

Kommen mehrere Quantoren derselben Art hintereinander vor, schreibe ich oft nur ein Quantorzeichen auf und trenne die gebundenen Variablen mit einem Komma:

$$\begin{aligned} \forall x, y : x < y & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y : x < y & \quad (\text{lies: „Für alle } x, y \text{ gilt } x < y \text{“}) \\ \exists x, y : x < y & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x \exists y : x < y & \quad (\text{lies: „Es gibt } x, y, \text{ für die } x < y \text{ gilt“}) \end{aligned}$$

§1.3.16 **Bemerkung.** Beachte, dass es bei Quantoren verschiedener Art auf die Reihenfolge ankommt. Für Menschen x, y sei beispielsweise $M(x, y) :\Leftrightarrow$ „ y ist (biologische) Mutter von x “. Dann sind

- (1) $\forall x \exists y : M(x, y)$: „Für jeden Menschen x gilt: es gibt einen Menschen y , der Mutter von x ist“.
- (2) $\exists y \forall x : M(x, y)$: „Es gibt einen Menschen y derart, dass für jeden Menschen x gilt: y ist Mutter von x “.

zwei grundlegend verschiedene Aussagen. (1) ist wahr, da jeder Mensch eine (biologische) Mutter hat; (2) ist dagegen falsch, weil nicht alle Menschen dieselbe Mutter haben.

Quantoren derselben Sorte dürfen dagegen miteinander vertauscht werden, siehe **Satz** §2.5.22.

§1.3.17 **Definition (Existenz-und-Eindeutigkeit-Aussage).** Für eine Eigenschaft $E(x)$ bezeichnet

$$\exists!x : E(x) \quad (\text{lies: „Es gibt genau ein } x, \text{ für das } E(x) \text{ gilt“})$$

die Aussage, dass es *genau ein* Objekt (vom Typ der Variablen x) gibt, das die Eigenschaft E besitzt. Ist M eine Menge von Objekten (vom Typ der Variablen x), so besagt die Formel

$$\exists!x \in M : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists!x : (x \in M \wedge E(x))$$

(lies: „Es gibt genau ein x in M , für das $E(x)$ gilt“)

dass es genau ein Element von M gibt, das die Eigenschaft E besitzt (außerhalb von M darf es aber auch andere solcher Objekte geben).

Das Zeichen $\exists!$ heißt **Eindeutigkeitsquantor**.

§1.3.18 **Beispiel.** Beispiele für $\exists!$ -Aussagen:

- (1) Ist M die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) :\Leftrightarrow$ „ m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\exists!m \in M : A(m)$, dass genau ein Bewohner meiner WG heute früh aufgestanden ist.
- (2) Die Formel „ $\exists!n \in \mathbb{N} : 32 + n = 101$ “ bezeichnet die Aussage: „Es gibt genau eine natürliche Zahl n , für die $32 + n = 101$ ist.“
- (3) Die Formel „ $\exists!x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$ “ bezeichnet die (falsche) Aussage: „Es gibt genau eine reelle Zahl x , für die $x^2 = 3$ ist.“

§1.3.19 **Bemerkung (Definition von $\exists!$ über die anderen beiden Quantoren).** Mithilfe der Gleichheitsrelation „ $=$ “ kann der Eindeutigkeitsquantor aus den anderen beiden Quantoren zusammengesetzt werden:

$$\exists!x : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x : E(x) \quad \wedge \quad \forall y \forall z : (E(y) \wedge E(z)) \rightarrow y = z$$

Die erste Hälfte $\exists x : E(x)$ besagt, dass es *mindestens* ein Objekt mit der Eigenschaft E gibt, während die zweite Hälfte $\forall y \forall z : \dots$ besagt, dass es *höchstens* ein Objekt mit der Eigenschaft E gibt. Diese Definition von $\exists!$ wird wichtig, wenn es um das Beweisen von Existenz-und-Eindeutigkeit-Aussagen geht, siehe **Axiom** §2.5.26.

Eine weitere Möglichkeit zur Definition des Eindeutigkeitsquantors wäre:

$$\exists!x : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x : E(x) \wedge \forall y : (E(y) \rightarrow x = y)$$

Mit den Beweistechniken aus **Kapitel 2** lässt sich beweisen, dass beide Definitionen äquivalent sind (was du dir aber auch einmal intuitiv überlegen solltest).

§1.3.20 **Notation** (*Definition per Kennzeichnung*). Sei $E(x)$ eine Eigenschaft, für die $\exists!x : E(x)$ gilt, d.h. es gibt nur genau ein Objekt (vom Typ der Variablen x), das die Eigenschaft E besitzt. Ist dann a ein Objekt, das die Eigenschaft E besitzt, so ist es legitim, von a mit einem bestimmten Artikel zu sprechen: a ist nicht nur *ein* Objekt mit der Eigenschaft E , sondern *das* Objekt mit der Eigenschaft E . Die Eigenschaft E lässt sich dadurch für eine Definition verwenden. Mit

„Sei a dasjenige Objekt, das die Eigenschaft E besitzt.“

legt man fest, das das Zeichen „ a “ fortan das (eindeutig bestimmte) Objekt mit der Eigenschaft E bezeichne. Man sagt auch, a werde durch die Eigenschaft E *gekennzeichnet*, und nennt $E(a)$ eine (definite) **Kennzeichnung** von a (Englisch: (*definite*) *description*).

§1.3.21 **Beispiel.**

- (1) Eine in der Analysis beliebte Definition der Kreiszahl π lautet

π ist definiert als die kleinste positive Nullstelle der Sinus-Funktion.

Beachte, dass im Vorfeld dieser Definition sichergestellt werden muss, dass die Sinus-Funktion überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt.

- (2) Mit Methoden der Kurvendiskussion lässt sich zeigen, dass die Gleichung $x^5 = x + 1$ genau eine Lösung in den reellen Zahlen besitzt (vgl. **Beispiel** §2.5.20), wohingegen sich mit Methoden der Galoistheorie⁹ zeigen lässt, dass sich diese Lösung nicht mit den Operationen $+$, $-$, \cdot , $:$, $\sqrt{\quad}$ konstruieren lässt¹⁰. Möchte man nun komfortabel mit dieser Lösung arbeiten, ist eine Definition per Kennzeichnung ratsam:

„Sei ξ die eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^5 = x + 1$.“

Nun lassen sich bequem Aussagen wie etwa „Es ist $\xi > 1$ “ formulieren.

- (3) *Rekursive Definitionen* lassen sich als Definitionen per Kennzeichnung verstehen. Beispielsweise lässt sich beweisen, dass es genau eine Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ gibt, die die *Rekursionsvorschrift*

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

erfüllt. Die Rekursionsvorschrift fungiert hier als kennzeichnende Eigenschaft. Die durch sie definierte Zahlenfolge heißt *Fibonacci-Folge*. Sie beginnt mit 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

§1.3.22 **Bemerkung** (*Mäßigung in der Verwendung von Formelsprache!*). Nach den ganzen Formeln aus diesem Abschnitt eine **Warnung**: Einige Mathe-Anfänger gelangen zu der Meinung, in der Mathematik käme es darauf an, Aussagen möglichst formelhaft zu notieren und Quantoren und Junktoren möglichst nie in Alltagssprache, sondern so oft wie möglich als Formelzeichen aufzuschreiben. Manche schreiben auch monströse Mutanten wie: „Daher \exists eine Zahl n , die ein Teiler von $a \wedge$ ein Teiler von b ist.“

Widerstehe dieser Idee! Mathematische Texte und Beweise sind zuallererst ein Akt der Kommunikation, in dem der Autor / die Autorin dem Leser eine Information übermitteln möchte. Die Effizienz dieser Informationsübermittlung muss für dich immer an erster Stelle stehen. Lass dich nicht knechten von (unter Mathematikern recht verbreiteten) Formel-Neurosen! Die Einführung der Symbole \wedge , \rightarrow , \neg , \forall , \exists

⁹Évariste Galois (1811-1832)

¹⁰Algebraiker sagen: *die Gleichung $x^5 = x + 1$ ist nicht auflösbar*. Galoistheorie wird in Heidelberg typischerweise in der Drittsemestervorlesung „Algebra 1“ vermittelt.

usw. geschieht **nicht**, damit wir ab sofort alles in diesen Zeichen aufschreiben. Sondern sie dient uns dazu, die Strukturen mathematischer Aussagen und Argumente analysieren und in aller Allgemeinheit besprechen und reflektieren zu können.

§1.3.23 **Vorschau** (**Logiken höherer Stufe*). Die bis hierhin entwickelte Sprache heißt *Prädikatenlogik erster Stufe*. Das Attribut „erststufig“ kommt daher, dass Objekte zwar Eigenschaften besitzen können, nicht jedoch auch Eigenschaften wieder Eigenschaften besitzen können. Dies wird in der *Prädikatenlogik zweiter Stufe* ermöglicht. Hier können Eigenschaften wiederum „Eigenschaften zweiter Stufe“ besitzen und, was noch viel wichtiger ist, die Quantoren können auf Eigenschaften erster Stufe angewendet werden. Eine Eigenschaft zweiter Stufe“ wäre beispielsweise

$$\mathcal{E}(E) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall n : (E(n) \rightarrow \exists m : (m > n) \wedge E(m))$$

wobei sich die Objektvariablen m, n auf natürliche Zahlen beziehen sollen. Dann besagt $\mathcal{E}(E)$ letztendlich, dass unendlich viele Zahlen die Eigenschaft E besitzen. Für $a \in \mathbb{N}$ lassen sich nun Formeln wie $\forall E : (\mathcal{E}(E) \rightarrow E(a))$ („ a besitzt alle Eigenschaften, die von unendlich vielen Zahlen erfüllt sind“) formulieren.

In Logiken noch höherer Stufen hat man dann „Eigenschaften von Eigenschaften von Eigenschaften von...“, die auf jeder Stufe mit ihrem eigenen Quantorenpaar \forall, \exists daherkommen. In der Mathematik gehören höherstufige Logiken jedoch nicht zum Mainstream, sie werden dort schlichtweg nicht benötigt. Der Grund dafür ist die Mengenlehre. Indem Mengen sowohl Elemente enthalten können und dadurch als Surrogat für Eigenschaften fungieren (vgl. **Vorschau** §1.3.6), als auch selbst wiederum als Objekte in anderen Mengen enthalten sein können (siehe **Vorschau** §3.4.4), eröffnen sie auf einen Rutsch die gesamte Spannweite beliebig höherstufiger Logiken, ja gelangen in gewisser Weise sogar über alle endlichen Stufen hinaus zu *transfiniten* Stufen. Hierin liegt die Mächtigkeit der Mengenlehre begründet, die es ihr als „Universaltheorie“ ermöglicht, ein formales Fundament für weite Teile der Mathematik bereitzustellen.

§1.4 Zweiwertige Interpretationen

Wahrheitswerte

§1.4.1 **Vorschau** (*Bivalenzprinzip*). Eine Interpretation einer Aussage ist die Zuweisung eines Wahrheitswerts nach gewissen Regeln.

In der klassischen Aussagenlogik trägt die Menge der Wahrheitswerte in natürlicher Weise die Struktur einer sogenannten **Boolschen Algebra**¹¹, in der allgemeineren intuitionistischen Logik die Struktur einer sogenannten **Heyting-Algebra**¹². Da sich ein Bit stets genau in einem der beiden Zustände 1 oder 0 befindet, besteht *die* Boolsche Algebra der Informatiker aus genau diesen beiden Wahrheitswerten, auch „true“ und „false“ genannt. Auch in diesem Vorkurs beschränken wir uns auf die zweielementige boolsche Algebra, die ausschließlich aus den beiden Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ besteht. Diese Einschränkung heißt *Prinzip der Zweiwertigkeit* oder **Bivalenzprinzip**.¹³

Während das Bivalenzprinzip in der Informatik ganz natürlich aus dem Binärsystem erwächst, ist es für die Mathematik eher unangemessen, siehe dazu **Beispiel** §5.3.17. In manchen einführenden Texten wirst du finden, dass die Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \dots$ über Wahrheitswerte *definiert* werden. Diese

¹¹George Boole (1815-1864)

¹²Arend Heyting (1898-1980)

¹³Philosophen sprechen hier manchmal vom „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“. In der mathematischen Logik wird als „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ jedoch etwas Anderes bezeichnet, nämlich **Axiom** §2.8.1.

Vorgehensweise ist in meinen Augen irreführend, weil sie die Syntax an eine Semantik koppelt, die ihre Allgemeinheit nicht angemessen einfängt, und sie der Möglichkeit beraubt, für weitere Logiken, wie etwa konstruktive Logik (vgl. **Vorschau** §2.8.7) oder parakonsistente Logik (vgl. **Vorschau** §2.7.5), verwendbar zu sein. Siehe hierzu auch **Bemerkung** §2.8.24.

Beachte, dass es sich bei unseren Wahrheitswerten, trotz der philosophisch aufgeladenen Wörter „Wahrheit“ und „falsch“, erstmal nur um irgendwelche Dinger handelt, für die wir später Wahrheitstabellen aufstellen. Anstelle von „wahr“ und „falsch“ könnten wir genauso gut auch mit 1 und 0 oder ♣ und ◇ rechnen.

§1.4.2 **Definition (Interpretation).** Eine (**bivalente**) **Interpretation** einer Aussage X ist die Zuweisung eines der beiden Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu X . Diese Zuweisung darf allerdings nicht vollkommen frei erfolgen, sondern muss den folgenden Regeln gehorchen:

- Ist X eine Aussage, die sich mittels der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ aus anderen Aussagen A, B zusammensetzt, so leitet sich der Wahrheitswert von X nach den folgenden Regeln aus den Wahrheitswerten von A und B ab:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

A	$\neg A$
w	f
f	w

Diese **Wahrheitstabellen** sind folgendermaßen zu lesen: In den linken Spalten sind alle möglichen Kombinationen aufgelistet, wie A und B mit Wahrheitswerten belegt sein können. Für jede solche Kombination muss dann der Wahrheitswert von $A \wedge B, A \vee B$ etc. aus der jeweiligen Zeile übernommen werden. Beispielsweise muss die Aussage „ $A \vee B$ “ als falsch interpretiert werden, wenn sowohl A als auch B als falsch interpretiert wurden; in den anderen drei Fällen, also falls mindestens eine der beiden Aussagen A, B als wahr interpretiert wird, muss auch $A \vee B$ als wahr interpretiert werden.

- Ist E eine Eigenschaft, so ist die Allaussage $\forall x : E(x)$ als wahr zu interpretieren, falls für jedes Objekt a (vom Typ der Variablen x) die Aussage $E(a)$ als wahr interpretiert ist. Wurde dagegen für ein Objekt a die Aussage $E(a)$ als falsch interpretiert, so ist auch $\forall x : E(x)$ als falsch zu interpretieren.
- Ist E eine Eigenschaft, so ist die Existenzaussage $\exists x : E(x)$ als wahr zu interpretieren, falls es mindestens ein Objekt a (vom Typ der Variablen x) gibt, für das die Aussage $E(a)$ als wahr interpretiert ist. Wurde dagegen für jedes Objekt a die Aussage $E(a)$ als falsch interpretiert, so ist auch $\exists x : E(x)$ als falsch zu interpretieren.

§1.4.3 **Beispiel.** Seien A, B, C drei Aussagen. Um die Wahrheitswerte von

$$D := (A \vee \neg B) \rightarrow C \quad \wedge \quad \neg C$$

für alle möglichen Interpretationen von A, B, C zu ermitteln, kannst du eine Wahrheitstafel aufstellen, die auf der linken Seite mit allen möglichen Wahrheitswerte-Kombinationen für A, B, C startet und in den rechten Spalten in wachsender Komplexität mit Teiltermen von D fortfährt, bis in der Spalte ganz rechts die gesuchten Wahrheitswerte stehen:

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \rightarrow C$	$\neg C$	$((A \vee \neg B) \rightarrow C) \wedge \neg C$
w	w	w	f	w	w	f	f
w	w	f	f	w	f	w	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f	w	f

Also gibt es nur einen Fall, in dem D eine wahre Aussage ist: nämlich wenn B wahr ist und A, C falsch sind.

§1.4.4 **Bemerkung.** Die Wahrheitstafel des Implikationspfeils

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

verwirrt Neulinge seit Jahrhunderten, weil sie in zweierlei Hinsicht nicht das alltagssprachliche Verständnis von „Wenn A , dann B “ wiedergibt:

1. Die Implikation $A \rightarrow B$ sagt lediglich aus, dass im Fall von A auch B gelten muss. Über den Fall, dass A falsch ist, gibt sie keine Auskunft. Beispielsweise ist die Aussage

„Falls ich verschlafe, komme ich zu spät zur Uni.“

in der Alltagssprache mehrdeutig und kann eine der beiden Aussagen

(i) „Wenn ich verschlafe, komme ich zu spät zur Uni. Andernfalls komme ich pünktlich.“

(ii) „Wenn ich verschlafe, komme ich zu spät. Wenn ich nicht verschlafe, komme ich vielleicht pünktlich, vielleicht aber auch trotzdem zu spät.“

bedeuten. In der Mathematik wird der Implikationspfeil ausschließlich im Sinne von (ii) gebraucht.

2. Die Implikation $A \rightarrow B$ kann wahr oder falsch sein, selbst wenn gar kein Zusammenhang zwischen A und B besteht. Setzt man beispielsweise

$A :=$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden“

$B :=$ „529 ist eine Quadratzahl.“

so ist B eine wahre Aussage. Egal, ob A nun wahr oder falsch ist, ergibt sich aus der Wahrheitstafel, dass „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist 529 eine Quadratzahl“ eine wahre Aussage ist, obwohl A mit B ja gar nichts zu tun hat.

Der Implikationspfeil in der Mathematik braucht nichts mit einem kausalen Zusammenhang zu tun zu haben. „ $A \rightarrow B$ “ besagt eher soviel wie „Mit der Annahme von A lässt sich B beweisen“. In Kapitel 2 wird noch einmal darauf eingegangen, siehe [Axiom §2.2.1](#) und [Bemerkung §2.2.9](#).

Tautologien

§1.4.5 **Definition.** Eine Aussage heißt

- **Tautologie** oder **allgemeingültig**, falls sie unter jeder möglichen Interpretation eine wahre Aussage ist.
- **erfüllbar**, falls es mindestens eine Interpretation gibt, unter der sie eine wahre Aussage ist.
- **unerfüllbar**, falls sie unter keiner möglichen Interpretation eine wahre Aussage ist.

§1.4.6 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) Die Aussage „Heute ist Mittwoch“ ist erfüllbar, aber keine Tautologie.
- (2) Die Aussage „Genau dann ist heute Mittwoch, wenn heute Mittwoch ist“ ist eine Tautologie.
- (3) Für beliebige Aussagen A, B sind

$$A \rightarrow A \quad A \vee \neg A \quad A \rightarrow (A \vee B)$$

jeweils Tautologien, was mit Wahrheitstafeln überprüft werden kann.

- (4) Für beliebige Aussagen A, B sind

$$A \leftrightarrow \neg A \quad A \wedge \neg A \quad \neg(A \rightarrow (A \vee B))$$

unerfüllbar.

§1.4.7 **Satz.** Seien A, B zwei Aussagen. Es gilt:

- a) Genau dann ist A unerfüllbar, wenn $\neg A$ eine Tautologie ist.
- b) Genau dann ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie, wenn A und B unter jeder Interpretation denselbe Wahrheitswert zukommt.
- c) Genau dann ist $A \rightarrow B$ eine Tautologie, wenn unter jeder Interpretation, unter der A eine wahre Aussage ist, auch B eine wahre Aussage ist. Diejenigen Interpretationen, unter denen A falsch ist, spielen hierbei keine Rolle.

§1.4.8 **Beweis.** a) Betrachte die Wahrheitstafel der Negation:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Unter einer festen Interpretation ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist. Dass $\neg A$ unter allen Interpretationen wahr ist, heißt dann genau, dass A unter allen Interpretationen falsch ist.

- b) Aus der Wahrheitstafel der Äquivalenz

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

liest man ab, dass $A \leftrightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben. Also ist $A \leftrightarrow B$ genau dann eine Tautologie, wenn A und B unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert haben.

c) Betrachte die Wahrheitstafel der Implikation:

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Dass $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist, heißt, dass $A \rightarrow B$ unter jeder möglichen Interpretation wahr sein muss. Dies ist äquivalent dazu, dass der Fall, dass A wahr und B falsch ist, niemals auftreten kann. Und das heißt gerade, dass unter jeder Interpretation, unter der A wahr ist, auch B wahr sein muss. ■

§1.4.9 **Bemerkung.** Eine große Liste aussagenlogischer Tautologien findest du in [Anhang C](#). Versuch mal, dir intuitiv für ein paar der Formeln klarzumachen, dass es sich um Tautologien handelt. So kannst du ein besseres Verständnis für die Junktoren erwerben.

§1.4.10 **Vorschau** (**Entscheidbarkeit der Aussagenlogik*). Ist A eine noch so kompliziert verschachtelte Aussage, die keine Prädikate und Quantoren enthält, sondern sich ausschließlich mittels aussagenlogischer Junktoren aus unzerlegbaren Aussagen zusammensetzt, so lässt sich mithilfe von Wahrheitstafeln stets überprüfen ob A eine Tautologie ist. Mit genügend Rechenkapazität kann mir mein Computer also einfach ausrechnen, ob eine Tautologie vorliegt oder nicht. Man spricht von der (algorithmischen) **Entscheidbarkeit der Aussagenlogik**. Wie effizient ein solcher Entscheidungsalgorithmus sein kann, ist eine andere Frage. Das *Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik* (kurz: SAT, für “satisfiability”) ist *NP-vollständig*: Sofern es einen Algorithmus gibt, der einen beliebigen aussagenlogischen Term in polynomialer Laufzeit darauf überprüfen kann, ob er eine Tautologie (hinsichtlich zweiwertiger Interpretationen) ist, wäre die berühmte [Frage nach P=NP](#) zu bejahen. Das Auffinden eines P-effizienten Entscheidungsalgorithmus könnte gravierende Konsequenzen für die Cybersicherheit haben, da diverse Verschlüsselungsalgorithmen auf einem NP-Problem, der Berechnung der Primfaktorzerlegung, beruhen, für dessen Brechung es derzeit keinen effizienten Algorithmus gibt. Obwohl die Frage nach P=NP nachwievor offen ist, dominiert die Vermutung, dass sie zu verneinen bzw. höchstens nichtkonstruktiv bejahbar ist.

Sobald Quantoren ins Spiel kommen, reichen Wahrheitstafeln nicht mehr aus. In der Berechenbarkeitstheorie wird sogar bewiesen, dass es keinen Algorithmus geben kann, der für eine beliebige, mittels Junktoren und Quantoren aus Prädikaten und Aussagen zusammengesetzte Aussage entscheiden kann, ob eine Tautologie vorliegt. Man spricht von der **Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik**. Das wäre auch zu schön, denn ein solcher Algorithmus wäre ein „mathematisches Orakel“, das für jede (in Prädikatenlogik formulierbare) mathematische Aussage ausrechnen könnte, ob sie allgemeingültig ist oder nicht.

§1.5 Aufgabenvorschläge

§1.5.1 **Aufgabe** (*Alltagssprache in Formeln übersetzen*). Zerlegt die folgenden Aussagen mithilfe der im Vortrag behandelten Junktoren und Quantoren in möglichst einfache Grundbausteine (es gibt hier nicht „die eine“ Lösung).

- Wird ein hartgekochtes Ei nicht mit kaltem Wasser abgeschreckt, so klebt die Schale am Eiweiß und das Ei lässt sich nicht gut schälen.
- Sofern er morgen Abend weder arbeiten muss noch Besuch von seiner Schwester kriegt, würde er sich mit mir treffen.
- Die Gleichung $x^5 = x + 1$ besitzt genau eine reelle Lösung.
- Wenn es irgendetwas schafft, dann Henrik.
- (Goldbach-Vermutung) Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, ist eine Summe zweier Primzahlen.
- Wenn ich entweder alle Prüfungen im ersten Versuch bestehe oder aber durch alle Prüfungen im ersten Versuch durchfalle, werde ich die ganze Nacht hindurch feiern.

§1.5.2 **Aufgabe** (*Formeln in Alltagssprache übersetzen*). Übersetzt die folgenden Aussageformeln in Alltagssprache und beurteilt, ob es sich um wahre oder falsche Aussagen handelt:

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : ((x < 0) \wedge (y < 0) \rightarrow xy > 0)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z} : x < n$
- $\exists n \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R} : x < n$
- $\exists! x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (y \neq 0 \wedge x \cdot y = 0)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : yz = (x + z)^2 - (x^2 + z^2)$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}_0 : n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (Vier-Quadrate-Satz)

§1.5.3 **Aufgabe** (*Wahrheitstafeln (L)*). Seien A, B zwei beliebige Aussagen. Entscheidet mithilfe von Wahrheitstafeln, in welchen Fällen die folgenden Aussagen wahr sind:

- $\neg(A \vee B)$
- $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (Consequentia mirabilis)
- $A \wedge (B \rightarrow \neg(A \wedge B))$
- $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (Linearitätsaxiom)

§1.5.4 **Aufgabe** (*freestyle*). An der Tafel von Captain Chaos stehen die folgenden Ausdrücke:

- | | |
|--|--|
| (i) $A \neg \rightarrow \neg A$ | (iv) $\exists x \in x : x \in x$ |
| (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < 3$ | (v) $\forall E : E(x)$ |
| (iii) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1$ | (vi) $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5 \dots : E(x_1, x_2, x_3, \dots)$ |

Was haltet ihr davon?

Kapitel 2

Beweise

In diesem Vortrag werden die grundlegenden logischen Schlussregeln und Beweistechniken erklärt und anhand von Beispielbeweisen vorgestellt. Dabei werden auch vorherrschende Normen für das Schreiben schöner und gut lesbarer Beweise besprochen.

§2.1 Logisches Schließen

§2.1.1 **Bemerkung** (*Buchtipps*). Dieses Vorkurs-Kapitel bietet nur einen Crashkurs im Beweisen. Eine freundliche und weit ausführlichere (aber auch sehr seitenstarke) Darstellung bietet das Buch [Vel06]. Über den Link im Literaturverzeichnis kannst du es als Pdf herunterladen.

§2.1.2 **Definition**. Eine **logische Schlussregel** ist ein Prinzip der Gestalt „Aus den Aussagen X kann auf die Aussage Y geschlossen werden“. Die Aussagen X heißen dabei die **Prämissen** der Schlussregel und die Aussage Y heißt ihre **Konklusion**. Die Anwendung einer Schlussregel heißt **logische Schlussfolgerung** oder auch **deduktiver Schluss**.

§2.1.3 **Beispiel**. Seien A, B irgend zwei Aussagen. Die Schlussregel *Modus tollens* (die später in [Axiom §2.6.2](#) eingeführt wird) geht folgendermaßen:

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Sie besagt: „Aus $A \rightarrow B$ und $\neg B$ kann auf $\neg A$ geschlossen werden.“ Die Prämissen dieser Schlussregel sind $A \rightarrow B$ und $\neg B$ und die Konklusion ist $\neg A$.

Die folgenden Schlüsse stellen drei *Instanzen* dieser Schlussregel dar:

Wäre ich reich, würde ich jeden Tag ins Restaurant gehen.
Ich gehe nicht jeden Tag ins Restaurant.

Also gilt: Ich bin nicht reich.

Ist n eine gerade Zahl, so ist auch $3n$ eine gerade Zahl.
 $3n$ ist keine gerade Zahl.

$(n \in \mathbb{N})$

Also gilt: n ist keine gerade Zahl.

Wenn der Fluxkompensator in Unwucht gerät, misslingt der Chronosprung.
Der Chronosprung ist gelungen.

Also gilt: Der Fluxkompensator ist nicht in Unwucht geraten.

Obwohl die drei Schlüsse inhaltlich grundverschieden sind, haben sie dieselbe logische Struktur gemein.

§2.1.4 **Definition (Axiom).** In der Regel liegen einer mathematischen Theorie einige Aussagen zugrunde, die nicht bewiesen, sondern schlicht als „gegeben“ vorausgesetzt werden. Sie heißen **Axiome** und kodieren oftmals Eigenschaften derjenigen Objekte, von denen die Theorie handelt.

§2.1.5 **Definition („Es gilt...“).** Sei A eine Aussage. Wir schreiben „ A ist gültig“ oder „Es gilt A “ oder „ A ist wahr“, falls es möglich ist, die Aussage A mit einer Abfolge logischer Schlussfolgerungen aus den im Kontext angenommenen Axiomen herzuleiten.

§2.1.6 **Bemerkung (* Beweisbarkeit vs. Wahrheit).** Beachte, dass dies erst einmal nichts mit dem Wahrheitswert „w“ aus **Definition §1.4.2** zu tun hat. Wahrheit und Herleitbarkeit sind zwei verschiedene Dinge. Zumindest gibt es folgende Zusammenhänge:

- Die logischen Schlussregeln sind so beschaffen, dass sich aus wahren Prämissen auch nur wahre Konklusionen ableiten lassen. Man nennt dies die *Korrektheit* (englisch: “soundness”) der Schlussregeln. Wenn du aus wahren Prämissen etwas Falsches hergeleitet hast, muss dir zwangsläufig ein Fehlschluss unterlaufen sein.
- Aus falschen Prämissen lassen sich dagegen sowohl wahre als auch falsche Aussagen herleiten. Dennoch ändert dies nichts an der Korrektheit. Unabhängig davon, ob $\exists n$ nun „in Wirklichkeit“ eine gerade Zahl ist oder nicht, ist der Schluss aus **Beispiel §2.1.3** korrekt, weil er eben nur von einer solchen Situation handelt, in der die Prämissen als wahr vorausgesetzt sind.
- Lässt sich jede wahre Aussage mittels logischer Schlüsse herleiten, so heißt der Logikkalkül *vollständig*. Die Vollständigkeit ist eine weitaus kompliziertere Angelegenheit als die Korrektheit und in der mathematischen Logik gibt es diverse **Vollständigkeitssätze** und **Unvollständigkeitssätze** (deren berühmteste diejenigen von Gödel¹ sind), die die Vollständigkeit und Unvollständigkeit gewisser Logikkalküle hinsichtlich gewisser Interpretationen beweisen.

§2.1.7 **Definition (Satz und Beweis).** Ein **mathematischer Satz** ist die Feststellung in einem mathematischen Text, dass eine Aussage A „gilt“, d.h. dass sie vermöge der in der Mathematik üblichen logischen Schlussregeln aus denjenigen Aussagen, die im Umfeld des Satzes axiomatisch angenommen werden oder bereits für gültig befunden wurden, hergeleitet werden kann.

Ein **mathematischer Beweis** für A ist eine (mehr oder weniger ausführliche) Beschreibung einer solchen Herleitung, die dich von der Gültigkeit von A überzeugt.

§2.1.8 **Beispiel (*).** In der synthetischen affinen und projektiven Geometrie ist die Aussage

(A) Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.

ein Axiom, das nicht hergeleitet wird, sondern einen Teil unseres Verständnisses von „Punkten“ und „Geraden“ kodiert. Allein aus diesem Axiom kann nun schon die folgende Aussage hergeleitet werden:

§2.1.9 **Satz.** *Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem gemeinsamen Punkt.*

§2.1.10 **Beweis.** Seien g, h zwei verschiedene Geraden, die sich in zwei Punkten P und Q schneiden. Weil es dann mehr als eine Gerade gibt, die durch P und Q verläuft, können P, Q nach (A) nicht verschieden sein, sodass $P = Q$. ■

¹Kurt Gödel (1906-1978)

§2.1.11 **Bemerkung (*)**. Dieser Beweis behält seine Gültigkeit auch dann, wenn das Wort „Gerade“ überall durch das Wort „Bierkrug“ ersetzt wird: Wenn durch je zwei verschiedene Punkte stets genau ein Bierkrug verläuft, so schneiden sich zwei verschiedene Bierkrüge in höchstens einem gemeinsamen Punkt. Dies ist typisch für die Logik: für die Gültigkeit logischer Schlüsse kommt es gar nicht auf den Inhalt der Aussagen an, sondern nur auf ihre Struktur. Beispielsweise ist es auch für die Korrektheit des dritten Schlusses aus [Beispiel §2.1.3](#) völlig egal, was eigentlich „Fluxkompensator“ und „Chronosprung“ überhaupt bedeuten.

§2.1.12 **Bemerkung (Ausführlichkeit eines Beweises)**. Komplizierte Beweise involvieren dutzende logische Schlussfolgerungen und ein Mathe-Lehrbuch würde, schriebe man alle Beweise in größter Ausführlichkeit auf, den halben Regenwald verschlingen. Daher listen mathematische Beweise selten jede einzelne logische Schlussfolgerung auf, sondern beschreiben mehrere logische Schlüsse auf einmal und führen „Routine-Argumente“, von denen erwartet werden kann, dass sie der Leser mit Leichtigkeit selbst ergänzen kann, gar nicht erst aus. Aus der Schule bist du es ja auch gewohnt, in einer langen Rechnung nicht jeden einzelnen Rechenschritt separat aufzuschreiben, sondern mitunter mehrere Zwischenschritte auf einmal durchzuführen. Im extremsten Fall wird in einem Beweis gar nicht argumentiert, sondern es wird lediglich behauptet, die Aussage gelte „offensichtlicherweise“ oder „sei klar“. In vielen Fällen sind solche Aussagen tatsächlich „offensichtlich“; manchmal kommt es aber auch vor, dass der Prof. selbst nicht weiß, dass die Zwischenschritte, die er gerade überspringt, weil er sie für „trivial“ hält, einer komplizierten Begründung bedürfen. Dann kann es passieren, dass er/sie bei einer Zwischenfrage minutenlang auf dem Schlauch steht. Mit Floskeln wie „gilt offensichtlich“ oder „ist trivial“ solltest du vorsichtig umgehen und sie nicht aus Verlegenheit verwenden, wenn dir keine bessere Begründung einfällt. In vielen Fällen ist ihre Verwendung, selbst wenn sie legitim ist, schlechter Stil.

Proposition 6.36: Sei $f: V \rightarrow W$ linear.
Dann gilt:

$$\boxed{1} \quad f \text{ ist surjektiv} \iff \text{im}(f) = W$$

$$\boxed{2} \quad f \text{ ist injektiv} \iff \ker(f) = \{0\}.$$

Beweis: $\boxed{1}$ ist klar \checkmark
 $\boxed{2}$ " \rightarrow " Sei f injektiv. dann gilt.

Abbildung 2.1: Beispiel aus einer LA1-Vorlesung für einen „Beweis“, in dem gar nichts argumentiert wurde. Vgl. die Begründung von [Definition §4.6.4](#).

§2.1.13 **Bemerkung (Subjektivität des Beweisbegriffs)**. Das Wort „überzeugt“ in meiner Beweisdefinition deutet eine subjektive Komponente an. Wenn dich ein Vorlesungs-„Beweis“ nicht überzeugen kann, dann ist er für dich eben auch kein Beweis. Ein Beweistext kann für den Einen eine befriedigende Begründung sein, während er für den Anderen völlig unverständlich und praktisch wertlos ist. Wenn dir unmittelbar einsichtig ist, dass eine Aussage gilt, kann sogar ein „Ist-klar“-Beweis überzeugend sein.

Nichtsdestotrotz gibt es gewisse Regeln und Techniken, über deren Zulässigkeit ein Konsens besteht. Beweise, die diesen Regeln unterliegen, muss ein Mathematiker anerkennen. Dass Beweise nicht

überzeugend sind, kommt nur selten von Verstößen gegen die Logik her; sondern eher von der Verwendung obskurer Begriffe, dem Mangel an Erläuterung komplizierter Beweisschritte, Flüchtigkeitsfehlern, dem Verschleiern von Beweislücken oder der unbegründeten Verwendung von Aussagen, die, wenn überhaupt, irgendwo fünfzig Seiten vorher einmal in einem unscheinbaren Lemma hergeleitet wurden.

Bereits in diesem Kapitel werde ich Beweise führen, nämlich um zu demonstrieren, wie sich gewisse logische Schlussregeln und Beweistechniken aus anderen ableiten lassen. Setz dich aber nicht unter Druck, die Herleitungen der Beweistechniken lückenlos nachvollziehen zu müssen, sondern begreife sie als Erklärungen, die plausibel machen sollen, warum die Beweistechniken zulässig sind. Letztendlich musst du dich selbst davon überzeugen, wie genau ist gar nicht so wichtig. In den Mathevorlesungen (mal abgesehen von Vorlesungen über Logik, wo es genau darum geht) werden die üblichen Beweistechniken größtenteils ohne weitere Begründung verwendet und ab der zweiten Semesterwoche erwartet auch niemand mehr, dass du die Logik, die deinen Beweisen zugrundeliegt, rechtfertigst (solange sie halt nicht „unlogisch“ ist).

§2.1.14 **Bemerkung** (*Tipps zur Beweisfindung*). In Anhang A findest du ein Beispiel und allgemeine Hinweise, wie sich eine konkrete Übungszettelaufgabe in Angriff nehmen lässt.

§2.2 Implikationen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen.

§2.2.1 **Axiom** (*Der direkte Beweis*). Um die Implikation $A \rightarrow B$ zu beweisen, kannst du die Technik des **direkten Beweises** benutzen:

Nimm an, dass die Aussage A gilt, und zeige nun mithilfe dieser Annahme (und aller weiteren Aussagen, die dir zur Verfügung stehen), dass auch B gilt.

§2.2.2 **Beispiel**. Sofern Bayer 04 Leverkusen nach dem 29. Spieltag sechzehn Punkte vor dem Tabellenzweiten steht, werden sie Deutscher Meister.

§2.2.3 **Beweis**. Angenommen, Leverkusen liegt nach dem 29. Spieltag sechzehn Punkte vor dem Tabellenzweiten. Weil nur noch fünf Spieltage verbleiben, kann der Zweite (und jeder weiter unten stehende Verein) nur noch $5 \cdot 3 = 15$ Punkte aufholen. Also ist der Bayer uneinholbar und wird (nach all den Jahren endlich) Deutscher Meister. ■

§2.2.4 **Bemerkung** (*Signalwörter*). Wenn du die Implikation $A \rightarrow B$ direkt beweist, kannst du dies deutlich machen, indem du den Beweis mit „Es gelte A “, „Es sei angenommen, dass A gilt“ oder Ähnlichem beginnst.

§2.2.5 **Satz** (** Jede Aussage impliziert sich selbst*). Es gilt

$$A \rightarrow A$$

§2.2.6 **Beweis**. Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Weil unter dieser Annahme ja A gilt, ist schon alles bewiesen. ■

§2.2.7 **Satz** (** Wahres folgt aus Beliebigen*). Es gilt

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Mit anderen Worten: Sofern A gilt, wird A auch von allen anderen Aussagen impliziert.

§2.2.8 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Nun ist zu zeigen, dass auch $B \rightarrow A$ gilt. Dazu sei zusätzlich angenommen, dass B gilt. Nun gilt auch A , weil dies ja schon ganz zu Beginn des Beweises angenommen wurde. ■

§2.2.9 **Bemerkung** („ \rightarrow “ bedeutet keine Kausalität!). Die Aussage, dass Wahres aus Beliebigem folgt, mag seltsam erscheinen (und wird unter die „Paradoxien der materialen Implikation“ gezählt), da dann ja auch Wahres aus solchen Aussagen folgt, die gar nichts damit zu tun haben. Beispielsweise ist „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist 4 eine Quadratzahl“ eine wahre Aussage. Dass dies „paradox“ anmutet, kommt von einer inadäquaten Interpretation des Implikationspfeils „ \rightarrow “.

In ihrer üblichsten Interpretation besagt die Aussage $A \rightarrow B$ nicht, dass es einen kausalen Zusammenhang zwischen A und B geben muss; sondern nur, dass B unter Annahme von A gilt, egal ob diese Annahme in die Herleitung von B mit einfließt oder nicht.

Logiken, die sich darum bemühen, dass „ \rightarrow “ wirklich die Bedeutung einer kausalen Implikation trägt, heißen „Relevanzlogiken“, da dort für eine Implikation $A \rightarrow B$ gefordert wird, dass A in irgendeiner Hinsicht „relevant“ für B ist. In Relevanzlogiken ist die Technik des direkten Beweises nicht mehr uneingeschränkt zulässig.

§2.2.10 **Axiom** (*Modus ponens*). Die logische Schlussregel

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

heißt „Modus ponens“. Sie besagt: Wann immer dir gegeben ist, dass sowohl $A \rightarrow B$ als auch A gültig sind, kannst du daraus B schlussfolgern.

§2.2.11 **Beispiel.** Ich habe angekündigt, dass ich, sofern ich zum Bürgermeister gewählt werde, Freibier für alle stiften werde. Nun wurde ich tatsächlich zum Bürgermeister gewählt, sodass jedem Freibier ausgeteilt wird.

§2.2.12 **Bemerkung** (*Logik-Latein*). Du brauchst dir nicht merken, dass diese Schlussregel „Modus ponens“ heißt. Ebensovienig brauchst du dir die anderen lateinischen Bezeichnungen in diesem Kapitel merken. Sie sollen dir jedoch das Nachschlagen in Internet und Literatur erleichtern.

§2.2.13 **Bemerkung.** Anfänger machen gelegentlich den Fehler, aus $A \rightarrow B$ und B auf die Aussage A zu schließen. Hier ist ein Beispiel für diesen Fehlschluss:

Wenn sie heimlich mit nem anderen Typen schläft, kommt sie später als sonst nach Hause.
Heute ist sie schon wieder später nach Hause gekommen, also ist klar, dass sie es mit jemand Anderem treibt.

Mach dir klar, warum diese Schlussfolgerung nicht logisch valide ist.

§2.2.14 **Satz** (*Direkter Beweis mit Zwischenschritten*). Seien $n \in \mathbb{N}$ und Z_1, \dots, Z_n eine Handvoll Aussagen. Um die Implikation $A \rightarrow B$ zu beweisen, kannst du die Implikationen

$$A \rightarrow Z_1, \quad Z_1 \rightarrow Z_2, \quad \dots, \quad Z_{n-1} \rightarrow Z_n \quad \text{und} \quad Z_n \rightarrow B$$

beweisen. In diesem Fall fungieren die Aussagen Z_1, \dots, Z_n als **Zwischenschritte**.

§2.2.15 **Beweis.** Es sei angenommen, dass ich alle Implikationen $A \rightarrow Z_1, Z_1 \rightarrow Z_2, \dots, Z_n \rightarrow B$ bewiesen habe. Um zu zeigen, dass dann auch $A \rightarrow B$ gilt, sei angenommen, dass A gilt. Wegen $A \rightarrow Z_1$ folgt, dass dann auch Z_1 gilt. Wegen $Z_1 \rightarrow Z_2$ folgt, dass auch Z_2 gilt. Auf diese Weise kann ich schrittweise die Z 's durchgehen, bis am Ende auch Z_n bewiesen ist. Und wegen $Z_n \rightarrow B$ gilt dann auch B . ■

§2.2.16 **Beispiel.** Falls es nächsten Sommer (schon wieder) zu wenig regnet, wird der Fichtenwald in meiner Heimatstadt gerodet werden.

§2.2.17 **Beweis.** Wenn es nächstes Jahr wieder zu wenig regnet, fehlt es den Fichten an Flüssigkeit, um ausreichend Harz für eine widerstandsfähige Rinde auszubilden. Dies erleichtert es Borkenkäfern, innerhalb der Rinde zu nisten, sodass sich die Borkenkäferpopulation im Wald stark vergrößert und Bäume teilweise absterben werden. Unter diesem Umstand wird die örtliche Forstbehörde beschließen, den Wald zum Schutz vor umstürzenden Bäumen und einer weiteren Ausbreitung der Borkenkäfer zu roden. ■

§2.3 Äquivalenzen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen.

§2.3.1 **Axiom (Hin- und Rückrichtung).** Aus dem Vorliegen der beiden Implikationen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ kann auf die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ geschlossen werden.

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array}}{A \leftrightarrow B}$$

Wenn du die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ beweisen willst, kannst du deinen Beweis also in zwei Teile aufteilen: In der **Hinrichtung** beweist du die Implikation $A \rightarrow B$. In der **Rückrichtung** beweist du die Implikation $B \rightarrow A$.

§2.3.2 **Beispiel.** Eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann ein Vielfaches von 6, wenn sie zugleich ein Vielfaches von 2 und ein Vielfaches von 3 ist.

§2.3.3 **Beweis.** „ \Rightarrow “: Sei n ein Vielfaches von 6. Dies besagt, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 6 \cdot k$. Es folgt $n = 2 \cdot (3k)$ und $n = 3 \cdot (2k)$. Also ist n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3.

„ \Leftarrow “: Es sei n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3. Demzufolge gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$ und $n = 3l$. Es folgt

$$\begin{aligned} n &= 3n - 2n \\ &= 3 \cdot 2k - 2 \cdot 3l && \text{(wegen } n = 2k \text{ und } n = 3l) \\ &= 6k - 6l \\ &= 6 \cdot (k - l) \end{aligned}$$

Also ist n auch ein Vielfaches von 6. ■

§2.3.4 **Bemerkung.** Die Methoden, die in diesen Beweis eingingen, gehören zur *Teilbarkeitstheorie*. Mehr darüber wirst du im zweiten Semester in der Vorlesung „Lineare Algebra 2“ lernen.

§2.3.5 **Bemerkung (Guter Stil).** Wenn du eine Äquivalenz per Hin- und Rückrichtung beweist, solltest du die jeweiligen Beweisabschnitte mit „ \Rightarrow “ und „ \Leftarrow “ (so wie im Beispiel gerade eben) oder mit Floskeln wie „Ich beweise zuerst die Hinrichtung“ und „Für den Beweis der Rückrichtung sei nun...“ beginnen, damit deinem Leser jederzeit klar ist, um welche der beiden Richtungen es gerade geht.

§2.3.6 **Axiom.** Aus der Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ kann sowohl auf $A \rightarrow B$ als auch auf $B \rightarrow A$ geschlossen werden.

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \quad \text{und} \quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

§2.3.7 **Beispiel.** Es wurde angekündigt, dass man die Prüfung genau dann besteht, wenn man mehr als 50 Punkte erreicht hat. Dann weiß ich einerseits, dass ich, wenn ich die Prüfung bestanden habe, mehr als 50 Punkte erreicht haben muss; andererseits weiß ich, dass ich, sofern ich mehr als 50 Punkte erreicht habe, auf jeden Fall bestanden habe.

§2.3.8 **Satz (*Äquivalenzbeweis mit Zwischenschritten).** Seien $n \in \mathbb{N}$ und Z_1, \dots, Z_n Aussagen. Dann kannst du die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ beweisen, indem du die Äquivalenzen

$$A \leftrightarrow Z_1, \quad Z_1 \leftrightarrow Z_2, \quad \dots \quad Z_{n-1} \leftrightarrow Z_n \quad \text{und} \quad Z_n \leftrightarrow B$$

beweist. In diesem Fall fungieren die Aussagen Z_1, \dots, Z_n als **Zwischenschritte**.

§2.3.9 **Beweis.** „ \Rightarrow “: Die Äquivalenzen $A \leftrightarrow Z_1, Z_1 \leftrightarrow Z_2, \dots, Z_n \leftrightarrow B$ beinhalten die Implikationen $A \rightarrow Z_1, Z_1 \rightarrow Z_2, \dots, Z_n \rightarrow B$, woraus sich mittels **Satz §2.2.14** ergibt, dass $A \rightarrow B$ gilt.

„ \Leftarrow “: Ebenso beinhalten die Äquivalenzen $A \leftrightarrow Z_1, Z_1 \leftrightarrow Z_2, \dots, Z_n \leftrightarrow B$ auch die Implikationen $B \rightarrow Z_n, Z_n \rightarrow Z_{n-1}, \dots, Z_1 \rightarrow A$, woraus sich mittels **Satz §2.2.14** auch $B \rightarrow A$ ergibt. ■

§2.3.10 **Notation (*).** Für $n \in \mathbb{N}$ und Aussagen Z_1, \dots, Z_n schreibt man kurz:

$$\begin{aligned} Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_n & \quad :\Leftrightarrow \quad Z_1 \rightarrow Z_2 \wedge \dots \wedge Z_{n-1} \rightarrow Z_n \\ Z_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow Z_n & \quad :\Leftrightarrow \quad Z_1 \leftrightarrow Z_2 \wedge \dots \wedge Z_{n-1} \leftrightarrow Z_n \end{aligned}$$

§2.3.11 **Beispiel (*).** Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Genau dann ist x eine Lösung der Gleichung $x^2 - x = 1$, wenn $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.²

§2.3.12 **Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - x = 1 & \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1 & \quad (\text{quadratische Ergänzung}) \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Weil x positiv ist und $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ wäre, ist dies wiederum äquivalent zu $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

²Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ heißt **Goldener Schnitt**.

§2.3.13 **Satz** (*Jede Aussage ist äquivalent zu sich selbst). Es gilt

$$A \leftrightarrow A$$

§2.3.14 **Beweis.** Mit **Satz** §2.2.5 ist zugleich die Hinrichtung und die Rückrichtung bewiesen. ■

§2.3.15 **Satz** (*Kommutativgesetz für \leftrightarrow). Es gilt

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$$

§2.3.16 **Beweis.** „ \Rightarrow “: Es gelte $A \leftrightarrow B$. Daraus folgt, dass sowohl $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$ gelten. Aber dies sind genau Rück- und Hinrichtung für $B \leftrightarrow A$.

„ \Leftarrow “: Die Rückrichtung beweist man analog zur Hinrichtung, unter Vertauschung der Rollen von A und B . ■

§2.3.17 **Bemerkung** (Substitutionsprinzip). Seien A, B zwei äquivalente Aussagen. Dann kannst du in Beweisen die Aussagen A und B beliebig miteinander vertauschen. Möchtest du beispielsweise A beweisen, kannst du genausogut B beweisen. Oder ist dir eine Aussage der Gestalt $(A \wedge C) \rightarrow D$ gegeben, so kannst du genausogut auch mit der Aussage $(B \wedge C) \rightarrow D$ arbeiten.

Aus diesem Grund sind Äquivalenzaussagen wertvoll und nützlich. Sie erlauben es, Aussagen von mehreren Blickwinkeln zu beleuchten und dadurch ein „tieferes“ Verständnis für sie zu gewinnen.

§2.3.18 **Satz** (*Curry-Paradoxon). Es gilt

$$(A \leftrightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Mit anderen Worten: Ist A bereits äquivalent dazu, dass B von A impliziert wird, so gilt B .

§2.3.19 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt. Nun ist zu beweisen, dass B gilt.

- (1) Es gilt $A \rightarrow B$, denn: Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Wegen $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt dann auch $A \rightarrow B$. Und weil A als gültig angenommen wurde, folgt daraus B .
- (2) Es gilt B , denn: Nach Schritt (1) gilt $A \rightarrow B$. Wegen $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt dann auch A . Weil nach Schritt (1) auch $A \rightarrow B$ gilt, folgt nun, dass auch B gilt. ■

§2.3.20 **Bemerkung** (*Selbstreferenzielle Aussagen). Das Curry-Paradoxon wird deshalb als „Paradoxon“ gehandelt, da es zumindest in der Alltagssprache ziemlich leicht ist, Aussagen A zu konstruieren, für die $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt. Zum Beispiel seien

$A :=$ „Wenn diese Aussage wahr ist, gewinne ich morgen im Lotto.“

$B :=$ „Morgen gewinne ich im Lotto.“

Dann gilt tatsächlich $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$, sodass aus **Satz** §2.3.18 folgt, dass ich morgen Millionär bin. Lotterien hassen diesen Trick.

Damit sich mit dem Curry-Paradoxon nicht einfach jede mathematische Aussage beweisen lässt, muss in der mathematischen Logik sichergestellt werden, dass sich die Selbstreferenzialität „Wenn diese Aussage wahr ist, dann ...“, die alltagssprachlich problemlos erzeugbar ist, nicht in formaler mathematischer Sprache nachbilden lässt.

* Zwei Fehler im Umgang mit Äquivalenzumformungen

§2.3.21 **Bemerkung** („Gleichungs-U's“). Aus der Schule sind es manche Studienanfänger gewohnt, Gleichungen dadurch zu beweisen, dass sie sie sovielen Äquivalenzumformungen unterziehen, bis am Ende eine „offensichtliche“ Gleichung rauskommt. Hier ein Beispiel für diese Vorgehensweise:

§2.3.22 **Beispiel**. Seien x, y zwei reelle Zahlen. Dann gilt:

$$x \cdot (y + 1) - x = (x + 1) \cdot y - y$$

§2.3.23 **Beweis** (*Mieser Beweis*). Es gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + 1) - x &= (x + 1) \cdot y - y \\ \Leftrightarrow xy + x - x &= xy + y - y \\ \Leftrightarrow xy &= xy \end{aligned}$$

Diesen „Beweisstil“ solltest du dir nicht aneignen bzw. so bald es geht abgewöhnen. Denn bei so einer Äquivalenzkette geschieht bei jeder Äquivalenzumformung auf jeder der beiden Seiten eine arithmetische Umformung, die der Leser nachvollziehen muss. Und diese arithmetischen Umformungen bilden den eigentlichen Kern des Beweises, letztendlich hat der Leser die Gleichungskette also in einer „U-Form“, deren beide Stränge erst ganz am Schluss zusammenfinden, zu lesen:

$$\begin{array}{ccc} x \cdot (y + 1) - x & = & (x + 1) \cdot y - y \\ \Leftrightarrow \begin{array}{c} | \\ xy + x - x \\ | \end{array} & = & \begin{array}{c} | \\ xy + y - y \\ | \end{array} \\ \Leftrightarrow xy & = & xy \end{array}$$

Schöner ist es, diese Kette arithmetischer Umformungen gar nicht erst als „U“, sondern als die Kette, als die sie letztendlich auch zu lesen ist, hinzuschreiben:

§2.3.24 **Beweis** (*Schönerer Beweis*). Es gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + 1) - x &= xy + x - x \\ &= xy \\ &= xy + y - y \\ &= (x + 1) \cdot y - y \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Unterscheide dabei sorgfältig von der Art und Weise, wie du den Beweis *findest* und der Art und Weise, wie du ihn am Ende *aufschreibst*: Während des Beweisfindungsprozesses auf dem Schmierblatt ist alles erlaubt. Aber am Ende, wenn es darum geht, den Beweis ansprechend aufzuschreiben, solltest du alle Unsauberkeiten tilgen und den Beweis in eine gut lesbare Form bringen. Ein mathematischer Beweis, wie du ihn in einem Lehrbuch findest oder wie ihn ein Dozent in der Vorlesung vorführt, gibt nur selten seinen Entstehungsprozess preis. (Was in didaktischer Hinsicht manchmal bedauerlich und einer der Hauptgründe dafür ist, dass sich Erstsemester mit dem Verfassen von Beweisen schwertun.)

§2.3.25 **Bemerkung** (Beweise „rückwärts“ führen). Mal angenommen, ich möchte beweisen, dass die Kubikwurzel von 3 größer ist als die Quadratwurzel von 2. Auf der Suche nach einem Beweis beginne ich einfach mal mit der zu zeigenden Ungleichung $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ und forme ein bisschen um:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \\ \rightarrow & \sqrt[3]{3^{3 \cdot 2}} > \sqrt{2^{2 \cdot 3}} && \text{(beide Seiten mit 6 potenzieren)} \\ \rightarrow & (\sqrt[3]{3^3})^2 > (\sqrt{2^2})^3 && \text{(Potenzgesetz anwenden)} \\ \rightarrow & 3^2 > 2^3 \\ \rightarrow & 9 > 8 \end{aligned}$$

Das sieht schonmal gut aus! Durch ein paar Umformungen bin ich zu einer wahren Aussage gelangt. Mancher Anfänger würde nun denken, dass das Problem damit erledigt ist und die obige Ungleichungskette als Beweis taugt.

Das ist aber falsch. Denn die Ungleichungskette beginnt ja mit der zu beweisenden Aussage. Hier wurde also nur die Aussage „Wenn $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ gilt, dann ist $9 > 8$ “ bewiesen, die aber leider nichts darüber aussagt, ob nun tatsächlich $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ gilt. Glücklicherweise handelt es sich aber bei allen Umformungen um Äquivalenzumformungen, sodass die Ungleichungskette auch in umgekehrter Richtung gültig ist:

$$\begin{aligned} & 9 > 8 \\ \rightarrow & 3^2 > 2^3 \\ \rightarrow & (\sqrt[3]{3^3})^2 > (\sqrt{2^2})^3 \\ \rightarrow & \sqrt[3]{3^{3 \cdot 2}} > \sqrt{2^{2 \cdot 3}} && \text{(Potenzgesetz anwenden)} \\ \rightarrow & \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} && \text{(sechste Wurzel ziehen)} \end{aligned}$$

Nun ist die Argumentation zumindest mal nicht mehr logisch falsch. Wenn ich jetzt noch das „Ungleichungs-U“ loswerde, kann sich der Beweis sehen lassen. Hier ist der finale Beweis:

§2.3.26 **Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{\sqrt{9}} \\ &= \sqrt[6]{9} \\ &> \sqrt[6]{8} && \text{(da } \sqrt[n]{-} \text{ eine ordnungserhaltende Operation und } 9 > 8 \text{ ist)} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{8}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beachte, dass die Struktur dieses Beweises nicht meinen Denkprozess bei der Beweissuche wieder spiegelt. Das ist aber völlig normal und ok. Sollte dein Beweis sehr kompliziert sein, wäre es natürlich trotzdem nett, wenn du, wo es deinem Leser hilft, ein paar Meta-Bemerkungen darüber, welche Idee hinter dem aktuellen Beweisschritt steckt, einstreust.

Auch Profis stoßen manchmal auf einen Beweis, indem sie die Argumentation „rückwärts“ ausprobieren, also mit der zu beweisenden Aussage starten und schauen, was sich damit anfangen lässt. Während diese Strategie völlig legitim zur Beweisfindung ist, ist sie es aber nicht zur Beweisniederschrift. Dein

zum Schluss aufgeschriebener Beweis muss das Problem sauber von den gegebenen Aussagen auf die zu beweisenden Aussagen durchgehen.

Der Versuch, einen Beweis rückwärts zu führen, kann auch Fehler erzeugen, die du, sofern du den Rückwärts-Gedankengang am Ende nicht kritisch reflektierst, übersiehst. Zum Beispiel könnte man meinen, dass für jede reelle Zahl x gilt: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Denn man kann ja umformen

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} \\ \rightarrow \cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) \\ \rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

und letzteres ist eine wohlbekannte wahre Aussage (die manchmal als „Satz des Pythagoras“³ bezeichnet wird). Jedoch ist

$$\cos(\pi) = -1 \neq \sqrt{1 - 0^2} = \sqrt{1 - \sin^2(\pi)}$$

sodass irgendetwas nicht stimmen kann. Kannst du ausmachen, wie und wo sich der Fehler eingeschlichen hat?

§2.3.27 **Bemerkung** (*Weitere Anfängerfehler*). Eine lange Liste von sowohl studentischen als auch dozentischen Fehlern, die ihm während seiner Lehrtätigkeit aufgefallen sind, hat Eric Schechter auf [seiner Homepage](#) zusammengetragen.

* Mehrfach-Äquivalenzen

§2.3.28 **Definition** („Die folgenden Aussagen sind äquivalent“). Einige mathematische Sätze haben die Gestalt einer größeren Äquivalenzaussage und sehen folgendermaßen aus:

Es seien ... und es gelte Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) ...
- (ii) ...
- (iii) ...
- (iv) ...
- ...

Diese Satzstruktur kommt so häufig vor, dass sie im Englischen mit “tfae” abgekürzt wird (für “the following are equivalent”). Sie besagt, dass je zwei der Aussagen (i), (ii), (iii), usw. zueinander äquivalent sind, also dass alle Äquivalenzen

$$(i) \leftrightarrow (ii), \quad (i) \leftrightarrow (iii), \quad (ii) \leftrightarrow (iii), \quad (i) \leftrightarrow (iv), \quad (ii) \leftrightarrow (iv), \quad (iii) \leftrightarrow (iv), \quad \dots$$

gelten. Man sagt auch, die Aussagen seien „paarweise äquivalent“.

§2.3.29 **Beispiel**. Sei D ein Dreieck in der euklidischen Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) D ist ein gleichseitiges Dreieck, d.h. alle Seiten von D haben dieselbe Länge.

³Pythagoras (6. Jhd. v. Chr.)

- (ii) Alle Innenwinkel von D sind gleich groß.
- (iii) Der Schwerpunkt von D stimmt mit seinem Umkreismittelpunkt überein.
- (iv) Der Schwerpunkt von D stimmt mit seinem Inkreismittelpunkt überein.

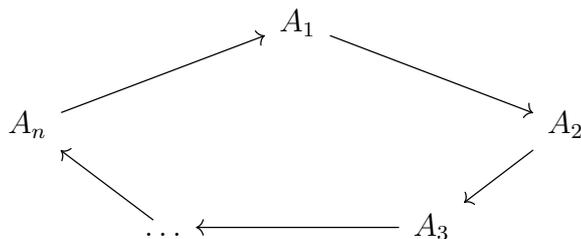
Würde man hier die Äquivalenz jedes Aussagenpaars per Hin- und Rückrichtung beweisen, müsste man insgesamt zwölf Implikationen beweisen. Mit der folgenden Beweistechnik lässt sich in solchen Fällen erheblich Arbeit einsparen:

§2.3.30 **Satz (Ringschluss)**. Seien $n \in \mathbb{N}$ und A_1, \dots, A_n eine Handvoll Aussagen, von denen du beweisen möchtest, dass sie paarweise äquivalent sind. Dann kannst du dies mit der Technik des **Ringschlusses** erledigen, indem du lediglich die Implikationen

$$A_1 \rightarrow A_2, \quad \dots, \quad A_{n-1} \rightarrow A_n, \quad A_n \rightarrow A_1$$

beweist. Auf diese Weise „schließt du einen Ring“ zwischen den Aussagen A_1, \dots, A_n .

§2.3.31 **Beweis**. Durch den Ringschluss wurden alle Implikationen im folgenden Diagramm bewiesen:



Man sieht, dass sich nun von jeder Aussage mittels Zwischenschritten zu jeder anderen Aussage gelangen lässt, indem man nur lang genug „im Uhrzeigersinn läuft“. Sind nun A_i, A_j zwei Aussagen aus A_1, \dots, A_n , so gilt wegen **Satz** §2.2.14 sowohl $A_i \rightarrow A_j$ als auch $A_j \rightarrow A_i$, also insgesamt $A_i \leftrightarrow A_j$. ■

§2.3.32 **Beispiel**. Für $n \in \mathbb{Z}$ sind äquivalent:

- (i) Es ist $n \geq 1$.
- (ii) Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $m + n > m$.
- (iii) Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m + n > m$.

§2.3.33 **Beweis**. (i)→(ii): Es gelte (i). Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist dann

$$m + n \geq m + 1 > m$$

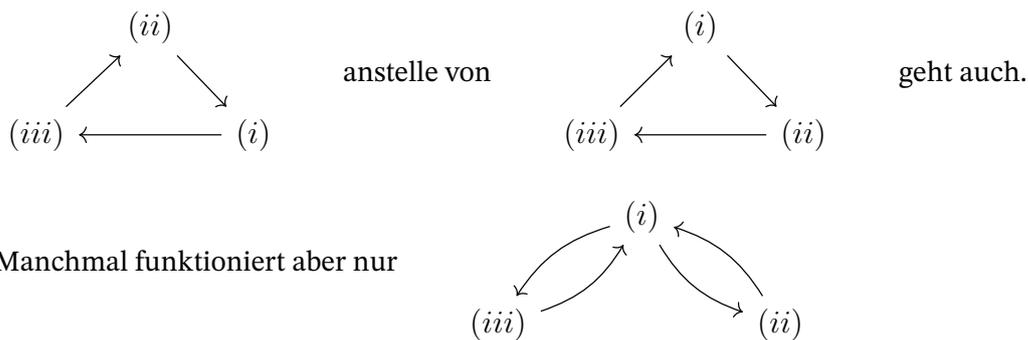
(ii)→(iii) ist trivial (da ganze Zahlen existieren).

(iii)→(i): Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m + n > m$. Subtraktion von m liefert die Ungleichung $n > 0$. Weil n ganzzahlig ist, muss dann schon $n \geq 1$ gelten. ■

§2.3.34 **Bemerkung.** Ein gelegentlicher Anfängerirrtum besteht darin, zu denken, der Ringschluss müsse immer in der Form $(i) \rightarrow (ii)$, $(ii) \rightarrow (iii)$, $(iii) \rightarrow (i)$ durchgeführt werden. Das ist Unsinn und führt dazu, dass sich manche Anfänger einen Haufen unnötige Mehrarbeit aufhalsen.

Genausogut kannst du etwa auch einen Ringschluss über die Implikationen $(ii) \rightarrow (i)$, $(iii) \rightarrow (ii)$ und $(i) \rightarrow (iii)$ durchführen.

Manchmal ist die Ringschluss-Methode auch unangebracht, wenn etwa die beiden Aussagen (ii) und (iii) so widerspenstig gegeneinander sind, dass keine Beweise für $(ii) \rightarrow (iii)$ und $(iii) \rightarrow (ii)$ in Sicht sind. In diesem Fall ist es vielleicht einfacher, den scheinbar längeren Weg zu gehen und $(i) \rightarrow (ii)$, $(ii) \rightarrow (i)$, $(i) \rightarrow (iii)$ und $(iii) \rightarrow (i)$ zu beweisen.



Entscheidend ist, dass du am Ende genügend viele Implikationen bewiesen hast, dass man mittels Zwischenschritten von jeder Aussage zu jeder anderen Aussage gelangen kann.

Wenn du eine umfangreiche Äquivalenzaussage beweisen möchtest, solltest du immer Ausschau nach Implikationen halten, die „geschenkt“ sind, d.h. deren Beweis besonders naheliegend und einfach ist (in [Beispiel §2.3.32](#) war das die Implikation $(ii) \rightarrow (iii)$). Daran kannst du dann deine Beweisstrategie orientieren. Ein [Äquivalenzbeweis aus meiner LA1-Vorlesung vom Wintersemester 2016/17](#) verlief so speziell, dass unser Dozent Denis Vogel zu Beginn seines Beweises einen „Plan“ aufschrieb, um seinen Hörern die Orientierung zu erleichtern.

wir haben eine ...

Folgerung 15.6: $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $A \in GL(n, K)$
- (ii) Es gibt ein $B \in M(n \times n, K)$ mit $AB = E_n = BA$
- (iii) Es gibt ein $B \in M(n \times n, K)$ mit $AB = E_n$
- (iv) Es gibt ein $B \in M(n \times n, K)$ mit $BA = E_n$
- (v) $\tilde{A}: K^n \rightarrow K^n$ ist ein Isom.
- (vi) $\text{Rang } A = n$.

Bew. Plan:

Abbildung 2.2: Eine Äquivalenzaussage aus der LA1 vom WS16/17. Hier sind die Implikationen $(ii) \rightarrow (iii)$ und $(ii) \rightarrow (iv)$ „geschenkt“.

§2.3.35 **Bemerkung (Guter Stil)**. Wenn du eine Aussage der Gestalt „Folgende Aussagen sind äquivalent: ...“ beweist, solltest du den Beweis jeder einzelnen Implikation mit „(i)→(ii)“, „(iii)→(i)“ oder Ähnlichem betiteln, damit deinem Leser jederzeit klar ist, welche Implikation gerade Thema ist.

§2.4 Und und Oder

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen.

§2.4.1 **Axiom (*)**. Für je zwei Aussagen A, B gelten:

$$\begin{array}{ll} (A \wedge B) \rightarrow A & A \rightarrow (A \vee B) \\ (A \wedge B) \rightarrow B & B \rightarrow (A \vee B) \end{array}$$

Mit anderen Worten: Aus $A \wedge B$ folgen sowohl A als auch B ; und A und B sind wiederum hinreichende Bedingungen für $A \vee B$.

§2.4.2 **Bemerkung (*)**. Wenn dir die Aussage $A \wedge B$ gegeben ist, kannst du das also so behandeln, als seien dir zwei Aussagen gegeben, nämlich A und B .

Und wenn du $A \vee B$ beweisen möchtest, würde es schon reichen, wenn du A beweist oder wenn du B beweist.

§2.4.3 **Axiom (Und-Aussagen beweisen)**. Um die Aussage $A \wedge B$ zu beweisen, genügt es, sowohl A als auch B zu beweisen:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

§2.4.4 **Beispiel (*)**. Die 25 ist eine Quadratzahl, die sich als Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen schreiben lässt. Außerdem ist sie die kleinste Quadratzahl mit dieser Eigenschaft.

§2.4.5 **Beweis**. (1) Aus

$$25 = 5^2 \quad \text{und} \quad 25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$$

folgt, dass 25 eine Quadratzahl ist, die sich als Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen schreiben lässt.

(2) Die einzigen Quadratzahlen $\neq 0$, die noch kleiner als 25 sind, sind

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$$

Wäre eine dieser vier Zahlen eine Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen, so müssten auch diese beiden Summanden in der Liste dieser vier Zahlen vorkommen. Aber alle möglichen Kombinationen

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 = 2 & 1 + 4 = 5 \\ 1 + 9 = 10 & 1 + 16 = 17 \\ 4 + 4 = 8 & 4 + 9 = 13 \\ 4 + 16 = 20 & 9 + 9 = 18 \end{array}$$

ergeben keine Quadratzahl. ■

§2.4.6 **Bemerkung (*)**. Drei natürliche Zahlen a, b, c , für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, heißen ein **pythagoräisches Tripel**. Also wurde soeben bewiesen, dass $(2, 3, 5)$ das kleinste pythagoräische Tripel ist. Dagegen besitzt nach dem berühmten **Großen Satz von Fermat**⁴ die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ keine positive ganzzahlige Lösung.

§2.4.7 **Axiom (Beweis mit Fallunterscheidung)**. Sei X eine Aussage, die du beweisen möchtest. Außerdem sei gegeben, dass $A \vee B$ gilt⁵. Dann kannst du X mit einer **Fallunterscheidung** beweisen, indem du sowohl zeigst, dass $A \rightarrow X$ gilt, als auch, dass $B \rightarrow X$ gilt.

§2.4.8 **Beispiel**. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n \cdot (n + 1)$ eine gerade Zahl.

§2.4.9 **Beweis**. Ich unterscheide zwei Fälle:

- 1) Der Fall, dass n eine gerade Zahl ist. In diesem Fall ist $n \cdot (n + 1)$ als Vielfaches der geraden Zahl n ebenfalls eine gerade Zahl.
- 2) Der Fall, dass n eine ungerade Zahl ist. In diesem Fall ist $n + 1$ eine gerade Zahl, sodass $n \cdot (n + 1)$ als Vielfaches der Zahl $n + 1$ ebenfalls eine gerade Zahl ist.

Also ist $n \cdot (n + 1)$ in jedem Fall gerade. ■

§2.5 Quantoren

In diesem Abschnitt sei $E(x)$ stets ein einstelliges Prädikat.

§2.5.1 **Axiom (*)**. Für jedes Objekt a vom Typ der Variablen x gelten die folgenden beiden Implikationen:

$$\begin{aligned} \forall x : E(x) &\rightarrow E(a) \\ E(a) &\rightarrow \exists x : E(x) \end{aligned}$$

§2.5.2 **Beispiel (*)**.

- (1) Weil in \mathbb{R} jede positive Zahl eine Qudaratwurzel besitzt, existiert in \mathbb{R} insbesondere auch eine Quadratwurzel der Drei.
- (2) Es existieren $p, q, m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $m^p - n^q = 1$, denn es ist $3^2 - 2^3 = 1$. (Nach dem **Satz von Catalan-Mihăilescu**^{6,7} gibt es aber keine weiteren Möglichkeiten)

§2.5.3 **Satz (Beweis per Beispiel)**. Du kannst die Existenzaussage $\exists x : E(x)$ dadurch beweisen, dass du ein konkretes Objekt a findest, das die Eigenschaft E besitzt. Man nennt dann a ein **Beispiel** für die Existenzaussage $\exists x : E(x)$.

§2.5.4 **Beweis**. Ergibt sich direkt aus der Formel $E(a) \rightarrow \exists x : E(x)$. ■

§2.5.5 **Beispiel**. Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.⁸

⁴Pierre de Fermat (1607-1665)

⁵Im Englischen sagt man: "the two cases A and B are exhausting".

⁶Eugène Charles Catalan (1814-1894)

⁷Preda Mihăilescu (*1955)

⁸Zahlen, die gleich der Summe ihrer echten Teiler sind, heißen **vollkommene Zahlen**.

§2.5.6 **Beweis.** Ein Beispiel ist die Zahl 28. Denn die echten Teiler der 28 sind genau

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 14$$

und es ist $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. ■

§2.5.7 **Bemerkung.** Lässt sich eine Existenzaussage mit einem Beispiel beweisen, so ist es eigentlich schlechter Stil, in einem Buch oder einem Vortrag nur die Existenzaussage anzugeben. Beispielsweise ist ja die Information „Die 28 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler“ umfangreicher als die Information „Es gibt eine natürliche Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist“. Du solltest dir nicht einfach nur die Existenzaussage merken, sondern, sofern es welche gibt, auch ein paar Beispiele und deren Konstruktion im Hinterkopf behalten. Auch die mathematische Essenz des Satzes von Euklid **Beispiel** §2.5.12 besteht weniger in der Aussage „Es gibt eine Primzahl, die größer als n ist“ als vielmehr in der trickreichen Art und Weise, wie eine solche Primzahl aufgespürt wird.

Es gibt allerdings Situationen, in denen eine Existenzaussage beweisbar ist, obwohl es unmöglich ist, konkrete Beispiele anzugeben. Falls in einer Vorlesung keine Beispiele gegeben werden (was bedauerlicherweise recht häufig vorkommt und dem Zeitdruck im Vorlesungsbetrieb zuschulden kommt), solltest du beim Prof. nachhaken, ob er/sie vielleicht deshalb keine Beispiele bringt, weil es gar keine gibt oder die wenigen bekannten Beispiele zu kompliziert und zeitaufwendig sind. Gute Bücher und Vorlesungen erkennt man daran, dass sie, wenn sie keine Beispiele geben, auch erklären, warum.

§2.5.8 **Axiom** (*Allaussagen an einem „beliebigen“ Objekt nachweisen*). Um die Allaussage $\forall x : E(x)$ zu beweisen, kannst du folgendermaßen vorgehen:

Führe eine Variable a , die bislang noch nicht im Beweis verwendet wurde und ein *beliebiges* Objekt vom Typ der Variablen x bezeichnen soll, ein und beweise nun, dass a die Eigenschaft E besitzt.

§2.5.9 **Beispiel.** Für jede reelle Zahl $y \neq 1$ existiert eine reelle Zahl $x \neq 2$ mit $y = \frac{x+1}{x-2}$.

§2.5.10 **Beweis.** Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 1$. Dann ist durch $x := \frac{1+2y}{y-1}$ eine wohldefinierte reelle Zahl gegeben. Nun rechnet man nach, dass $x \neq 2$ und $\frac{x+1}{x-2} = y$. ■

§2.5.11 **Bemerkung** (*Signalwörter*). Ein Beweis einer Allaussage beginnt meist mit Floskeln wie „Sei x ein beliebiges...“ oder „Die Zahl n sei beliebig aber fest“. Viele Texte lassen das Signalwort „beliebig“ auch weg und beginnen schlicht mit sowas wie „Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ...“. So auch der Beweis gerade eben. Sie setzen vom Leser voraus, dass er erkennt, dass hier gerade der Beweis einer Allaussage beginnt.

§2.5.12 **Beispiel** (**Satz von Euklid⁹*). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Primzahl P , die größer als n ist.

§2.5.13 **Bemerkung.** Die logische Struktur dieses Satzes ist

$$\forall (\text{natürliche Zahl } n) \exists (\text{Primzahl } P) : P > n$$

Da es sich insgesamt um eine Allaussage handelt, sollte der Beweis mit „Sei n eine (beliebige) natürliche Zahl“ beginnen. Da daraufhin die Existenzaussage

$$\exists P \in \mathbb{N} : P \text{ ist eine Primzahl und größer als } n$$

übrig bleibt, fährt der Beweis sodann mit der geschickten Konstruktion eines Beispiels fort:

⁹Euklid (ca. 3. Jhd. v. Chr.)

§2.5.14 **Beweis.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die $\leq n$ sind, gibt es auch nur endlich viele Primzahlen, die $\leq n$ sind. Seien k deren Anzahl und p_1, \dots, p_k diese Primzahlen. Betrachte die Zahl¹⁰

$$N := p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

Dann lässt N bei der Division durch p_1, \dots, p_k jedes Mal den Rest Eins übrig, ist also nicht durch p_1, \dots, p_k teilbar. Wegen $N \geq 2$ muss N gemäß dem Fundamentalsatz der Arithmetik aber mindestens einen Primteiler P besitzen. Da P keines der p_1, \dots, p_k sein kann, aber die p_1, \dots, p_k alle Primzahlen sind, die $\leq n$ sind, muss P größer als n sein. ■

§2.5.15 **Bemerkung (*)**. Manche behalten den Beweis des Satzes von Euklid fehlerhaft im Gedächtnis mit der Meinung, für $k \in \mathbb{N}$ und die ersten k Primzahlen p_1, \dots, p_k müsse die Zahl $p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ zwangsläufig ebenfalls eine Primzahl sein. Dies ist jedoch falsch. Beispielsweise ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$ keine Primzahl. Ein weiterer verbreiteter Irrtum ist die Meinung, es würde sich um einen Widerspruchsbeweis handeln.

§2.5.16 **Bemerkung (*)**. Achte darauf, dass die zum Beweis einer Allaussage von dir eingeführte Variable, die das „beliebige“ Objekt bezeichnen soll, auch wirklich nirgendwo sonst im bisherigen Beweis aufgetaucht ist, also auch wirklich „beliebig“ ist. Ansonsten könnte dir ein Fehler wie der folgende passieren:

§2.5.17 **Beispiel (*)**. Es gibt eine natürliche Zahl n , die größergleich jede andere natürliche Zahl ist.

§2.5.18 **Beweis.** Setze $n = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass jede natürliche Zahl kleinergleich n ist. Dazu sei n eine beliebige natürliche Zahl. Weil bekanntlich stets $n \leq n$ gilt, ist also jede beliebige Zahl kleinergleich n .

§2.5.19 **Axiom (*Verwenden von Existenzaussagen)**. Sofern dir in einem Beweis eine Aussage der Gestalt $\exists x : E(x)$ gegeben ist, kannst du eine Variable a , die bisher noch nirgends im Beweis aufgetaucht ist, einführen, und die Aussage $E(a)$ als gegeben annehmen.

§2.5.20 **Beispiel (*)**. Die Gleichung $x^5 = x + 1$ besitzt eine reelle Lösung.¹¹

§2.5.21 **Beweis.** Betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

Dann gilt $f(1) = -1$ und $f(2) = 29$. Nach dem Zwischenwertsatz der Analysis muss dann f irgendwo zwischen 1 und 2 eine Nullstelle haben. Sei ξ eine solche Nullstelle (hier wird **Axiom** §2.5.19 genutzt). Dann gilt $\xi^5 - \xi - 1 = 0$, also $\xi^5 = \xi + 1$. ■

§2.5.22 **Satz (*Vertauschbarkeit von Quantoren derselben Sorte)**. Sei R ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y : R(x, y) &\leftrightarrow \forall y \forall x : R(x, y) \\ \exists x \exists y : R(x, y) &\leftrightarrow \exists y \exists x : R(x, y) \end{aligned}$$

§2.5.23 **Beweis.** Ich beweise jeweils nur die Hinrichtung „ \rightarrow “. Die Rückrichtung wird, unter Vertauschung der Rollen von x und y , analog bewiesen.

„ \forall “: Seien a, b zwei beliebige Objekte und es gelte $\forall x \forall y : R(x, y)$. Mit **Axiom** §2.5.1 folgt durch Einsetzen von a , dass $\forall y : R(a, y)$, und durch Einsetzen von b , dass $R(a, b)$. Da a beliebig gewählt war, gilt somit sogar $\forall x : R(x, b)$. Und da auch b beliebig gewählt war, folgt hieraus, dass $\forall y \forall x : R(x, y)$.

¹⁰Im Fall $k = 0$ ist $N = 2$, weil dann ein „leeres Produkt“ involviert ist. Siehe **Notation** §6.4.12.

¹¹vgl. **Beispiel** §1.3.21

„ \exists “: Es sei angenommen, dass $\exists x \exists y : R(x, y)$ gilt. Dann gibt es ein Objekt a , für das $\exists y : R(a, y)$ gilt (hier wird **Axiom** §2.5.19 genutzt). Somit gibt es auch ein Objekt b , für das $R(a, b)$ gilt. Wegen $R(a, b)$ gilt insbesondere $\exists x : R(x, b)$ und daraus folgt wiederum $\exists y \exists x : R(x, y)$. ■

§2.5.24 **Satz** (* *Quantoren verschiedener Art sind nicht miteinander vertauschbar!*). Sei R ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt zwar

$$\exists x \forall y : R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x : R(x, y)$$

die umgekehrte Implikation „ \leftarrow “ ist im Allgemeinen aber falsch, vgl. **Bemerkung** §1.3.16.

§2.5.25 **Beweis**. Sei b ein beliebiges Objekt und es gelte $\exists x \forall y : R(x, y)$. Dann gibt es ein Objekt a , für das $\forall y : R(a, y)$ gilt. Also gilt insbesondere $R(a, b)$. Daraus folgt $\exists x : R(x, b)$ und da das Objekt b beliebig gewählt war, impliziert dies $\forall y \exists x : R(x, y)$. ■

Eindeutigkeitsbeweise

In **Bemerkung** §1.3.19 wurde thematisiert, wie sich der Eindeutigkeitsquantor $\exists!$ aus dem Allquantor und dem Existenzquantor zusammensetzt:

$$\underbrace{\exists x : E(x)}_{\text{Es gibt mindestens ein...}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall y, z : (E(y) \wedge E(z)) \rightarrow y = z}_{\text{Es gibt höchstens ein...}}$$

Diese Und-Aussage kann gemäß **Axiom** §2.4.3 als zwei separate Aussagen behandelt werden:

§2.5.26 **Axiom** (*Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis*). Wenn du eine Aussage der Form $\exists! x : E(x)$ beweisen möchtest, kannst du deinen Beweis in einen Existenz-Teil und einen Eindeutigkeit-Teil aufteilen:

- Im Existenz-Teil beweist du, dass es mindestens ein Objekt gibt, das die Eigenschaft E besitzt (z.B. durch Angabe eines Beispiels).
- Im Eindeutigkeit-Teil beweist du, dass je zwei Objekte, die die Eigenschaft E besitzen, identisch sind.

Dabei spielt es keine Rolle, ob du erst den Existenz- und dann den Eindeutigkeit-Teil aufschreibst oder umgekehrt.

§2.5.27 **Beispiel**. Es gibt genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $ax = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

§2.5.28 **Beweis**. Eindeutigkeit): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ax = a$ und $bx = b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a &= a \cdot b && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } a) \\ &= b \cdot a \\ &= b && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } b) \end{aligned}$$

(Existenz): Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $0x = 0$, sodass die Zahl 0 die gewünschte Eigenschaft besitzt. ■

§2.5.29 **Bemerkung** (*Guter Stil*). Du solltest den Existenz-Teil und den Eindeutigkeit-Teil deines Beweises immer auch als solchen betiteln, so wie es gerade im Beispiel geschah.

§2.5.30 **Bemerkung** (*Wechselspiel zwischen Formeln und Umgangssprache*). Studienanfänger neigen dazu, in ihren Beweisen möglichst alle Sachverhalte in Formelsprache auszudrücken und logische Schritte möglichst rechnerisch, als symbolische Manipulation gewisser Formelterme, durchzuführen. Versuche stattdessen, in deinen Beweisen ein Gleichgewicht aus Formeln und Alltagssprache herzustellen. Wo ein kurzer deutscher Satz dasselbe sagt wie eine Formel, ziehe in Erwägung, den deutschen Satz hinzuschreiben. Gedruckte Beweise (wie in diesem Skript) enthalten oft mehr Fließtext als handschriftliche Beweise (wie sie dein Prof. an die Tafel schreibt).

§2.6 Widerlegen

Alle bisher besprochenen Beweistechniken zielten darauf ab, die „Wahrheit“ von Aussagen zu etablieren. Nun soll es darum gehen, wie man von einer Aussage nachweisen kann, dass sie „falsch“ ist.

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.

§2.6.1 **Definition (Widerlegung).** Eine **Widerlegung** der Aussage A ist ein Beweis ihrer Negation $\neg A$. Anstelle von „Es gilt $\neg A$ “ schreiben wir auch „ A ist falsch“¹².

Indirekt Argumentieren

§2.6.2 **Axiom (Indirekte Widerlegung).** Die Schlussregel *Modus tollens* besagt:

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Mit anderen Worten: Wenn aus A etwas Falsches folgt, muss A selbst falsch sein.

Du kannst die Aussage A also dadurch widerlegen, dass du eine falsche Aussage B findest, die aus A folgen würde. Man nennt diese Technik eine **indirekte Widerlegung** oder auch **Reductio ad absurdum** (latein für „Rückführung auf das Widersinnige“).

§2.6.3 **Beispiel.** 198 ist nicht durch 17 teilbar.

§2.6.4 **Beweis.** Es ist $187 = 11 \cdot 17$. Wäre 198 durch 17 teilbar, so auch die Differenz $198 - 187 = 11$. Aber 11 ist kein Vielfaches von 17. ■

§2.6.5 **Satz (Widerlegung einer Allaussage per Gegenbeispiel).** Wenn du eine Aussage der Gestalt $\forall x : E(x)$ widerlegen möchtest, genügt es, irgendein Objekt a zu finden, für das du $\neg E(a)$ beweisen kannst. Man nennt dann das Objekt a ein **Gegenbeispiel** zur Allaussage $\forall x : E(x)$.

§2.6.6 **Beweis.** Angenommen, es wurde $\neg E(a)$ bewiesen. Wegen $(\forall x : E(x)) \rightarrow E(a)$ würde dann aus $\forall x : E(x)$ eine falsche Aussage folgen, sodass $\forall x : E(x)$ selbst schon falsch sein muss. ■

§2.6.7 **Beispiel.** Nicht jeder Mensch findet im Leben die große Liebe.

§2.6.8 **Beweis.** Schauen wir uns **Franz Schubert (1797-1828)** an. Mit Mitte Zwanzig an der Syphilis erkrankt, mit 31 Jahren gestorben, war es dem Armen nicht leicht gemacht, einen Herzenspartner zu finden. Mehr als kurzzeitige Liebschaften, die er nicht frei ausleben konnte, waren dem Wiener Komponisten zu Lebzeiten nicht vergönnt. Ich meine, hör dir seine **Winterreise** nur mal an! – ■

§2.6.9 **Bemerkung.** In manchen Situationen mag man geneigt sein, eine Allaussage, statt mit einem Gegenbeispiel, mit der entgegengesetzten Allaussage zu widerlegen. Beispielsweise würde man die Aussage „Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 < 0$ “ widerlegen wollen mit der Feststellung, dass ja, ganz im Gegenteil, $x^2 \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. In der Praxis ist diese Argumentationsweise schon ok, weil ja klar ist, dass sich dann jede reelle Zahl, sagen wir $x = 1$, als Gegenbeispiel anbietet, und die Argumentation die zusätzliche Information übermittelt, dass solche Gegenbeispiele sogar ganz beliebig wählbar und nichts Besonderes sind.

¹²Mit dem Wahrheitswert „f“ aus **Definition** §1.4.2 hat dies erstmal nichts zu tun, vgl. **Bemerkung** §2.1.6

Streng logisch ist diese Argumentationsweise jedoch unzulässig, da Allaussagen keine Existenzaussagen implizieren. Betrachten wir dazu die Aussage $A : \Leftrightarrow$ „Alle Vampire sind Veganer“. Man wäre vielleicht geneigt, diese Aussage zu widerlegen mit der Feststellung, dass ja, ganz im Gegenteil, alle Vampire Blut trinken, also keine Veganer sind. A wäre also falsch. Allerdings würde nun mit der Regel aus **Satz** §2.8.22 folgen, dass es mindestens einen Vampir geben muss, der kein Veganer ist. Aber dies kann ja auch nicht stimmen, weil es keine Vampire gibt.

Siehe hierzu auch **Bemerkung** §3.3.5.

§2.6.10 **Satz** (**Implikationen widerlegen*). Du kannst die Implikation $A \rightarrow B$ dadurch widerlegen, dass du beweist, dass A und $\neg B$ gelten.

§2.6.11 **Beweis**. Angenommen, es wurden A und $\neg B$ bewiesen. Da A gilt, würde dann aus $A \rightarrow B$ die falsche Aussage B folgen. Gemäß **Axiom** §2.6.2 ist dadurch $A \rightarrow B$ widerlegt. ■

§2.6.12 **Bemerkung** (*). Die indirekte Widerlegung basiert darauf, dass eine Aussage, aus der etwas Falsches folgt, nicht stimmen kann. Dass aus einer Aussage etwas Wahres folgt, lässt dagegen keinen Rückschluss auf ihren Wahrheitsgehalt zu, da nach **Satz** §2.2.7 ja Wahres aus Beliebigem folgt.

Betrachte z.B. die (falsche) Aussage $A =$ „Jedes Kind weiß, dass die Summe der Zahlen 1 bis 100 gleich 5050 ist“. Dann folgt aus A , dass auch der neunjährige Gauß¹³ dies wusste, was der **Anekdote** zufolge sogar eine wahre Aussage ist. Das ändert allerdings nichts daran, dass A wohl trotzdem falsch ist.

§2.6.13 **Definition** (*Kontraposition*). Die Implikation $\neg B \rightarrow \neg A$ heißt die **Kontraposition** der Implikation $A \rightarrow B$.

§2.6.14 **Beispiel**. Die Kontraposition der Aussage „Wenn ich krank bin, bleibe ich zuhause“ ist „Wenn ich nicht zuhause bleibe, bin ich nicht krank“.

§2.6.15 **Satz** (*Der indirekte Beweis*). Die Implikation $\neg A \rightarrow \neg B$ kannst du dadurch beweisen, dass du stattdessen die Implikation $B \rightarrow A$ beweist. Diese Technik heißt **indirekter Beweis** oder auch **Beweis per Kontraposition**.

§2.6.16 **Beweis**. Angenommen, es wurde $B \rightarrow A$ bewiesen. Dass nun $\neg A \rightarrow \neg B$ gilt, zeige ich per direktem Beweis. Dazu sei angenommen, dass $\neg A$ gilt. Wegen $B \rightarrow A$ würde dann aus B die falsche Aussage A folgen. Mit **Axiom** §2.6.2 folgt nun $\neg B$. ■

§2.6.17 **Beispiel**. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m^2 > n^2$. Dann ist auch $m > n$.

§2.6.18 **Beweis**. Für einen indirekten Beweis sei angenommen, dass $m \leq n$. Multiplikation dieser Ungleichung mit m bzw. n liefert $m^2 \leq mn$ und $mn \leq n^2$. Insgesamt also $m^2 \leq mn \leq n^2$. ■

§2.6.19 **Bemerkung** (*Guter Stil*). Wenn du einen indirekten Beweis führst, solltest du dies ankündigen, beispielsweise mit „Ich führe einen indirekten Beweis“, „Der Beweis geschieht indirekt“ oder „Beweis per Kontraposition:“.

Widersprüche

§2.6.20 **Definition**. Ein **Widerspruch** ist eine Aussage der Gestalt $A \wedge \neg A$.

¹³Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

§2.6.21 **Beispiel.** Für $A :=$ „Schrödingers Katze geht es gut“ besagt $A \wedge \neg A$, dass es der Katze sowohl gut geht als auch nicht gut geht.

§2.6.22 **Axiom (Satz vom Widerspruch).** Für jede Aussage A gilt

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Mit anderen Worten: Jeder Widerspruch ist eine falsche Aussage.

§2.6.23 **Satz (Der Widerspruchsbeweis).** Du kannst die Aussage A dadurch widerlegen, dass du aus ihr einen Widerspruch herleitest. Diese Beweistechnik heißt **Widerspruchsbeweis**.

§2.6.24 **Beweis.** Es sei angenommen, dass aus A ein Widerspruch der Gestalt $B \wedge \neg B$ folgt. Nach dem Satz vom Widerspruch gilt $\neg(B \wedge \neg B)$, sodass aus A eine falsche Aussage folgt. Wegen **Axiom** §2.6.2 ist A somit falsch. ■

§2.6.25 **Beispiel.** Unter den positiven reellen Zahlen gibt es keine kleinste.

§2.6.26 **Beweis.** Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, es gäbe eine kleinste positive reelle Zahl x . Da x positiv ist, wäre auch $\frac{x}{2}$ eine positive reelle Zahl. Ferner wäre $\frac{x}{2} < x$. Aber dies widerspräche der Annahme, dass x die kleinste positive reelle Zahl sei. ■

§2.6.27 **Bemerkung (Guter Stil).** Wenn du dich in einem Widerspruchsbeweis befindest, kannst du, um deinem Leser zu signalisieren, dass du gerade mit *falschen* Aussagen arbeitest, den Konjunktiv II verwenden („dann wäre“, „nun gälte“). Außerdem solltest du die Annahme einer falschen Aussage stets mit „angenommen, dass...“ oder Ähnlichem beginnen. Für den Leser ist es äußerst wichtig zu wissen, zu welchem Zeitpunkt im Beweis es gerade um die Herleitung wahrer Aussagen geht, und wann es (um eines Widerspruchsbeweises willen) um die Herleitung falscher Aussagen geht.

Die Stelle im Beweis, an der ein Widerspruch erreicht wird, wird handschriftlich gerne mit einem Blitz ζ markiert. In gedruckten Texten ist der Blitz weniger gängig. Egal wie du es handhabst: du solltest den Moment, an dem du bei einem Widerspruch angelangt bist, stets sprachlich hervorheben.

§2.6.28 **Satz (*).** Es gilt

$$\neg(A \leftrightarrow \neg A)$$

§2.6.29 **Beweis.** Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, dass $A \leftrightarrow \neg A$ gilt. Daraus folgte $A \rightarrow \neg A$ und wegen $A \rightarrow A$ gälte dann insgesamt $A \rightarrow (A \wedge \neg A)$. Wegen **Satz** §2.6.23 müsste A demnach falsch sein, d.h. es müsste $\neg A$ gelten. Wegen $A \leftrightarrow \neg A$ folgte aus $\neg A$, dass auch A gälte. Insgesamt läge nun der Widerspruch $A \wedge \neg A$ vor. ■

§2.6.30 **Beispiel (*).** Aus diesem Grund werden auch Aussagen der Gestalt $A \leftrightarrow \neg A$ gelegentlich als „Widerspruch“ bezeichnet. Ich persönlich bevorzuge es, Aussagen, die zu ihrer eigenen Negation äquivalent sind, „Paradoxa“ zu nennen.

- (1) Das Standardbeispiel für eine Aussage, die äquivalent zu ihrer Negation ist, ist das (selbstreferenzielle) **Lügner-Paradoxon**:

$$A := \text{„Diese Aussage ist falsch.“}$$

Hier gilt tatsächlich $A \leftrightarrow \neg A$.

- (2) Eine weitere bekannte Situation, in der eine Aussage äquivalent zu ihrer Negation ist, ist das „Barbier-Paradoxon“, das wiederum ein Spezialfall der Russellschen Antinomie **Satz** §2.6.35 ist:

§2.6.31 **Satz**. *In Sevilla lebt kein Mann, der genau denjenigen Männern Sevillas den Bart rasiert, die sich nicht selbst den Bart rasieren.*

§2.6.32 **Beweis**. Für einen Widerspruchsbeweis sei einmal angenommen, dass es doch einen solchen Mann gäbe. Aus der Beschreibung leitet man ab, dass sich dieser Mann genau dann selbst den Bart rasierte, wenn er ihn sich nicht selbst rasierte. Aber das ist unmöglich. ■

§2.6.33 **Satz** (* *Existenzaussagen widerlegen*). Sei E eine Eigenschaft. Dann kannst du $\nexists x : E(x)$ dadurch beweisen, dass du eine Variable a einführest, die ein beliebiges Objekt vom Typ der Variablen x bezeichnet, und nun die Aussage $E(a)$ widerlegst.

§2.6.34 **Beweis**. Damit wäre dann $\neg E(a)$ bewiesen. Weil a beliebig gewählt war, folgt aus **Axiom** §2.5.8 die Aussage $\forall x : \neg E(x)$. Für einen Widerspruchsbeweis sei nun angenommen, dass dennoch $\exists x : E(x)$ gälte. Dann gäbe es ein Objekt b , für das $E(b)$ gälte. Aber wegen $\forall x : \neg E(x)$ gälte auch $\neg E(b)$ und dies ist ein Widerspruch. ■

§2.6.35 **Satz** (* *Russellsche Antinomie*¹⁴). Sei R ein zweistelliges Prädikat, dessen beide Variablen vom selben Typ sind. Dann gilt:

$$\nexists x \forall y : (R(x, y) \leftrightarrow \neg R(y, y))$$

Mit anderen Worten: Es gibt kein Objekt x derart, dass jedes Objekt y genau dann in Relation zu x stünde, wenn es nicht in Relation zu sich selbst stünde.

§2.6.36 **Beweis**. Für einen Widerspruchsbeweis sei einmal angenommen, es gäbe ein Objekt a , für das

$$\forall y : R(a, y) \leftrightarrow \neg R(y, y)$$

gälte. Weil es sich hierbei um eine Allaussage handelt, könnten wir für y das Objekt a einsetzen und erhielten die Äquivalenz

$$R(a, a) \leftrightarrow \neg R(a, a)$$

Aber dies mündet mit **Satz** §2.6.28 in einen Widerspruch. ■

§2.6.37 **Bemerkung** (*). Definiert man hierbei $R(x, y) :\Leftrightarrow$ „ x rasiert y den Bart“, so ergibt sich genau das Barbier-Paradoxon aus **Beispiel** §2.6.30. Bezeichnen andererseits x, y zwei Mengen und $R(x, y) :\Leftrightarrow y \in x$, so erhält man die Aussage, dass es keine Menge gibt, deren Elemente genau diejenigen Mengen sind, die kein Element von sich selbst sind. Diese Aussage löste zu Beginn des 20. Jahrhunderts die **Grundlagenkrise** aus.

§2.7 Aus Falschem folgt Beliebigen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.

¹⁴Bertrand Russell 1872-1970

§2.7.1 **Axiom** (*Modus tollendo ponens*). Aus $A \vee B$ und $\neg A$ kannst du schlussfolgern, dass B gilt:

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Diese Schlussregel kommt bei der Entscheidungsfindung durch Ausschlusskriterien zum Einsatz: Wenn ich weiß, dass von einer Handvoll Aussagen mindestens eine gelten muss, kann ich die wahre Aussage finden, falls ich alle anderen Aussagen ausschließen kann.

§2.7.2 **Beispiel**. Ich habe beschlossen, meiner Freundin einen Erdbeerkuchen oder einen Käsekuchen zum Geburtstag zu backen. Falls ich morgen keine Erdbeeren mehr auftreiben kann, werde ich ihr also einen Käsekuchen backen.

§2.7.3 **Satz** (*Aus Falschem folgt Beliebiges*). Es gelten die folgenden beiden Implikationen:

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \\ (A \wedge \neg A) \rightarrow B$$

Mit anderen Worten: Aus einer falschen Aussage oder einem Widerspruch lässt sich jede beliebige Aussage ableiten. Auf Latein heißt dieses Prinzip **ex falso quodlibet**.

§2.7.4 **Beweis**. Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass $\neg A$ und A gelten. Aus A folgt $A \vee B$, und wegen $\neg A$ muss gemäß **Axiom** §2.7.1 dann schon B gelten. ■

§2.7.5 **Vorschau** (*principle of explosion*). Da aus Widersprüchen Beliebiges folgt, ist in die Logik eine Art „Bombe“ eingebaut (in der englischen Literatur spricht man sogar vom “principle of explosion”). Denn wenn es uns gelingen sollte, auch nur eine einzige Aussage sowohl zu beweisen als auch zu widerlegen, folgt aus **Satz** §2.7.3, dass *jede* beliebige mathematische Aussage beweisbar ist, so unsinnig sie auch sei. Das Angeben von Beweisen wäre dann nicht mehr dazu geeignet, die „Wahrheit“ irgendwelcher Aussagen zu begründen.

Logiken, in denen das ex falso quodlibet nicht gilt, heißen **parakonsistente Logiken**. In solchen Logiken hält sich der von Widersprüchen verursachte Schaden in Grenzen und wird teils sogar absichtlich in Kauf genommen; dafür ist dort die Schlussregel aus **Axiom** §2.7.1 nicht uneingeschränkt anwendbar.

§2.8 Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.

Die bisherigen Axiome und Beweistechniken bilden zusammen die *intuitionistische Logik* oder auch „konstruktive Logik“. Zur *klassischen Logik*, die der Mainstream-Mathematik zugrundeliegt, fehlt nur noch das folgende Axiom:

§2.8.1 **Axiom** (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten*). Es gilt:

$$A \vee \neg A$$

Dieses Prinzip heißt auch **tertium non datur**, was Latein für „ein Drittes kommt nicht vor“ ist. Im Englischen spricht man vom *principle of excluded middle*.

§2.8.2 **Beispiel**. Sei $A :=$ „Heute ist Mittwoch“. Dann ergibt sich aus dem tertium non datur die Aussage „Heute ist Mittwoch oder heute ist nicht Mittwoch“.

§2.8.3 **Bemerkung.** Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist nicht zu verwechseln mit dem Bivalenzprinzip aus **Vorschau** §1.4.1. Das tertium non datur schließt (entgegen seinem Namen – die Terminologie ist unglücklich kontraintuitiv) nicht aus, dass es mehr als nur zwei Wahrheitswerte gibt; es besagt lediglich, dass sich die beiden Wahrheitswerte von A und $\neg A$ „in der Summe immer zu ‘absolut wahr’ kombinieren“.

Dagegen wird in der philosophischen Logik mitunter das Bivalenzprinzip als „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ bezeichnet. Per Wahrheitstafel sieht man, dass $A \vee \neg A$ eine Tautologie hinsichtlich bivalenter Interpretationen ist.

§2.8.4 **Bemerkung (Konsequenz für Fallunterscheidungsbeweise).** Mit dem tertium non datur stehen uns bedingungslos Oder-Aussagen der Gestalt $A \vee \neg A$ zur Verfügung, die wir für Fallunterscheidungsbeweise einsetzen können. Möchten wir eine Aussage X beweisen und ist A irgendeine beliebige weitere Aussage, so genügt es, X einmal unter der Annahme, dass A gilt, zu beweisen, und andererseits unter der Annahme, dass A falsch ist.

Eine der berühmtesten bisher unentschiedenen Aussagen der Mathematik ist die **Riemannsche Vermutung**¹⁵. Obwohl bislang unbekannt ist, ob die Vermutung zutrifft oder nicht, konnten **diverse Aussagen** dadurch bewiesen werden, dass sie sowohl für den Fall, dass die Vermutung zutrifft, bewiesen wurden, als auch für den Fall, dass die Vermutung falsch wäre. Hierbei wird essenziell auf das tertium non datur zurückgegriffen.

§2.8.5 **Beispiel.** Es existieren zwei positive irrationale Zahlen a, b , für die a^b eine rationale Zahl ist.

§2.8.6 **Beweis.** Ich setze als bekannt voraus, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Betrachte nun die Aussage

$$A := „\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ ist eine rationale Zahl.}“$$

Gemäß dem tertium non datur gilt entweder A oder $\neg A$, sodass eine Fallunterscheidung durchgeführt werden kann:

1) Falls A gilt, setze einfach $a = b = \sqrt{2}$.

2) Falls A falsch ist, setze $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$. Weil A falsch ist, ist a eine irrationale Zahl und es ist

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

eine rationale Zahl. ■

§2.8.7 **Vorschau (* Nichtkonstruktivität des tertium non datur).** Der vorige Beweis ist ein bekanntes Beispiel für einen „nichtkonstruktiven Beweis“. In ihm wird die Existenz zweier Zahlen a, b mit besonderen Eigenschaften bewiesen, ohne dass am Ende des Beweises ein konkretes Beispiel für ein solches Zahlenpaar vorliegt. Zwar wird aus dem Beweis deutlich, dass mindestens eine der beiden Zahlen

$$b = \sqrt{2} \text{ und } a = \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad b = \sqrt{2} \text{ und } a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

funktioniert – welche genau, bleibt jedoch im Dunklen. (Tatsächlich ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ eine irrationale Zahl, sodass $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ gewählt werden muss – aber dies ist deutlich schwieriger zu beweisen.)

¹⁵Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Mit dem tertium non datur kommt ein weiteres seltsames Phänomen auf: In der Mathematik gibt es Aussagen, die, sofern keine Widersprüche herleitbar sind (denn dann wäre nach **Satz** §2.7.3 ja *alles* beweisbar), weder beweisbar noch widerlegbar sind. Die berühmteste dieser „unentscheidbaren“ Aussagen ist vielleicht die **Kontinuumshypothese**. Ist nun A eine unentscheidbare Aussage und ist die Theorie widerspruchsfrei, so sind weder A noch $\neg A$ beweisbar, obwohl dem tertium non datur gemäß $A \vee \neg A$ gilt. Es liegt also die Situation vor, dass eine Aussage der Gestalt „ X oder Y “ beweisbar ist, obwohl weder X noch Y beweisbar sind.

In der *intuitionistischen Logik*, die aus allen bisherigen Axiomen mit Ausnahme des tertium non datur besteht, kann dies nicht vorkommen. Mit fortgeschrittenen semantischen Methoden lässt sich zeigen, dass sich, sofern sich eine Aussage der Gestalt „ X oder Y “ ohne Rückgriff aufs tertium non datur beweisen lässt, stets auch schon eine der beiden Aussagen X oder Y beweisen lässt¹⁶. Allerdings lassen sich ohne Rückgriff aufs tertium non datur eben auch weniger Aussagen überhaupt beweisen.

§2.8.8 **Satz** (*Regel der doppelten Verneinung*). *Es gilt*

$$A \leftrightarrow \neg\neg A$$

§2.8.9 **Beweis** (*). „ \Rightarrow “: Es gelte A . Dann würde aus $\neg A$ sofort der Widerspruch $A \wedge \neg A$ folgen, sodass $\neg A$ falsch sein muss. Also gilt $\neg\neg A$.

„ \Leftarrow “: Es gelte $\neg\neg A$. Gemäß tertium non datur gilt $A \vee \neg A$. Da $\neg A$ falsch ist, folgt vermöge **Axiom** §2.7.1, dass A gelten muss. ■

§2.8.10 **Bemerkung**. Aufgrund der Regel der doppelten Verneinung kann jede Aussage A mit der verneinenden Aussage $\neg\neg A$ identifiziert werden. Die Aussage A zu beweisen, ist dann gleichwertig dazu, die Aussage $\neg A$ zu widerlegen. Diese Verlagerung macht für den Beweis von A auch alle Widerlegetechniken nutzbar.

§2.8.11 **Satz**. *Es gilt:*

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

§2.8.12 **Beweis** (*). „ \Rightarrow “: Es gelte $A \rightarrow B$. Um nun „ $\neg A \vee B$ “ zu beweisen, unterscheide ich zwei Fälle:

- 1) Der Fall, dass A wahr ist. In diesem Fall folgt aus der Annahme $A \rightarrow B$, dass auch B gilt. Aber dann ist insbesondere auch $\neg A \vee B$ korrekt.
- 2) Der Fall, dass A falsch ist. In diesem Fall gilt $\neg A \vee B$ ebenfalls, da ja schon $\neg A$ gilt.

Also gilt in jedem Fall $\neg A \vee B$.

„ \Leftarrow “: Es gelte $\neg A \vee B$. Für einen direkten Beweis von $A \rightarrow B$ sei angenommen, dass A gilt. Aber dann ist $\neg A$ falsch nach **Satz** §2.8.8, sodass wegen $\neg A \vee B$ nur noch die Option übrig bleibt, dass B gilt. ■

§2.8.13 **Satz** (*). *Möchtest du eine Aussage der Gestalt $A \vee B$ beweisen, so kannst du stattdessen auch $\neg A \rightarrow B$ beweisen.*

§2.8.14 **Beweis**. Es ist

$$\begin{aligned} \neg A \rightarrow B &\leftrightarrow \neg\neg A \vee B && \text{(wegen Satz §2.8.11)} \\ &\leftrightarrow A \vee B && \text{(Regel der doppelten Verneinung)} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

¹⁶Auf Englisch nennt man dies die „Disjunction property“ der intuitionistischen Logik.

§2.8.15 **Beispiel (*)**. In der Ebene sind zwei Geraden zueinander parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.

§2.8.16 **Beweis**. Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, so laufen sie in einer Richtung aufeinander zu. Weil in dieser Richtung der Abstand beider Geraden mit konstanter Rate abnimmt, müssen sich die Geraden in dieser Richtung irgendwann schneiden. ■

§2.8.17 **Satz (Regeln von De Morgan¹⁷)**. Es gilt:

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

§2.8.18 **Beweis (*)**. Es müssen insgesamt vier Implikationen

$$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B \tag{1}$$

$$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B) \tag{2}$$

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B \tag{3}$$

$$\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B) \tag{4}$$

bewiesen werden.

- (1) Aus $A \rightarrow (A \vee B)$ und $B \rightarrow (A \vee B)$ folgt per Kontraposition, dass $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ und $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$ gelten muss. Insgesamt also $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.
- (4) Aus $(A \wedge B) \rightarrow A$ und $(A \wedge B) \rightarrow B$ folgt per Kontraposition, dass $\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$ und $\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$ gelten muss. Insgesamt dann $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$.
- (2) Sowohl im Fall A als auch im Fall B würde aus $\neg A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgen. Somit gilt $(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$. Per Kontraposition folgt daraus $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$.
- (3) Für einen indirekten Beweis sei angenommen, dass $\neg(\neg A \vee \neg B)$ gilt. Mit der (bereits bewiesenen) Implikation (1) folgt $\neg\neg A \wedge \neg\neg B$, was mit der Regel der doppelten Verneinung zu $A \wedge B$ vereinfacht werden kann. ■

§2.8.19 **Satz (Implikationen per Widerspruch beweisen)**. Um die Implikation $A \rightarrow B$ zu beweisen, kannst du folgendermaßen vorgehen: Nimm an, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten, und versuche nun, einen Widerspruch herzuleiten.

§2.8.20 **Beweis**. Folgt aus der Annahme $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch, so ist damit $\neg(A \wedge \neg B)$ bewiesen. Wegen

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge \neg B) &\leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B && \text{(Regel von De Morgan)} \\ &\leftrightarrow \neg A \vee B && \text{(Regel der doppelten Verneinung)} \\ &\leftrightarrow A \rightarrow B && \text{(nach Satz §2.8.11)} \end{aligned}$$

gilt dann auch $A \rightarrow B$. ■

§2.8.21 **Bemerkung (Tücken des Widerspruchsbeweises)**. Im Vergleich zum direkten Beweis ist ein Widerspruchsbeweis für $A \rightarrow B$ oft leichter zu finden, weil ja eine Annahme mehr als beim direkten Beweis zur Verfügung steht (nämlich $\neg B$). Einige Anfänger machen es sich zur Gewohnheit, alle möglichen Aussagen per Widerspruch zu beweisen. Das bringt allerdings Nachteile mit sich:

- Wo auch ein direkter oder indirekter Beweis möglich ist, sind Widerspruchsbeweise oft unnötig kompliziert.

¹⁷Augustus De Morgan (1806 - 1871)

- Beweist du eine Implikation $A \rightarrow B$ direkt, sagen wir über eine Reihe von Zwischenschritten $A \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_n \rightarrow B$, so sind damit auch gleich alle Implikationen $A \rightarrow Z_1, \dots, A \rightarrow Z_n$ mitbewiesen worden. Manchmal kann es vorkommen, dass eine der Aussagen Z_1, \dots, Z_n letztendlich bedeutender ist, als die Aussage B , auf die du es ursprünglich abgesehen hattest. Beweist du dagegen die Implikation $A \rightarrow B$ über einen Widerspruchsbeweis, so müssen alle Aussagen, die im Laufe des Beweises unter der Annahme $A \wedge \neg B$ hergeleitet wurden, am Ende wieder verworfen werden, weil sie ja auf der letztendlich falschen Prämisse $A \wedge \neg B$ basierten. Insofern sind direkte Beweise prinzipiell ergiebiger und lehrreicher.
- Häufig ist der mutmaßliche „Widerspruchsbeweis“ für $A \rightarrow B$ eigentlich nur ein direkter Beweis der Kontraposition $\neg B \rightarrow \neg A$, sagen wir über eine Reihe von Zwischenschritten $\neg B \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_n \rightarrow \neg A$. In diesem Fall sind dann auch gleich alle Implikationen $\neg B \rightarrow Z_1, \dots, \neg B \rightarrow Z_n$ mitbewiesen, und die Implikation $A \rightarrow B$ folgt am Ende indirekt aus $\neg B \rightarrow \neg A$.

Aus diesem Grund solltest du, wenn du einen validen Widerspruchsbeweis gefunden hast, immer noch einmal überprüfen, ob er sich nicht leicht in einen direkten Beweis umformulieren lässt. Zugegebenermaßen gibt es jedoch Situationen, in denen ein direkter Beweis unmöglich und ein Widerspruchsbeweis unvermeidlich ist.

§2.8.22 **Satz (Quantoren negieren).** Sei E eine Eigenschaft. Es gilt:

$$\begin{aligned} \nexists x : E(x) &\leftrightarrow \forall x : \neg E(x) \\ \neg(\forall x : E(x)) &\leftrightarrow \exists x : \neg E(x) \end{aligned}$$

§2.8.23 **Beweis (*).** Nach Aufteilung in Hin- und Rückrichtungen bleiben insgesamt vier Implikationen übrig, die bewiesen werden müssen:

$$\neg(\exists x : E(x)) \rightarrow (\forall x : \neg E(x)) \tag{1}$$

$$(\forall x : \neg E(x)) \rightarrow \neg(\exists x : E(x)) \tag{2}$$

$$\neg(\forall x : E(x)) \rightarrow (\exists x : \neg E(x)) \tag{3}$$

$$(\exists x : \neg E(x)) \rightarrow \neg(\forall x : E(x)) \tag{4}$$

- (1) Es gelte $\nexists x : E(x)$. Sei nun a ein beliebiges Objekt. Aus $E(a) \rightarrow \exists x : E(x)$ folgt per Kontraposition, dass $\neg E(a)$ gelten muss. Weil a beliebig gewählt war, ist damit bewiesen, dass $\forall x : \neg E(x)$ gilt.
- (4) Ergibt sich aus **Satz** §2.6.5.
- (2) Wurde schon im Beweis von **Satz** §2.6.33 gezeigt.
- (3) Für einen indirekten Beweis sei angenommen, dass $\nexists x : \neg E(x)$ gilt. Mit der (bereits bewiesenen) Implikation (1) folgt $\forall x : \neg\neg E(x)$, was mit der Regel der doppelten Verneinung zu $\forall x : E(x)$ vereinfacht werden kann. ■

§2.8.24 **Bemerkung (* Vollständigkeit der erststufigen Prädikatenlogik).** Jede Formel, die bisher als Axiom gewählt oder hergeleitet wurde, ist eine Tautologie, d.h. wahr unter jeder möglichen (zweiwertigen) Interpretation im Sinne von **Definition** §1.4.2. Der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* besagt auch das Umgekehrte: Jede Tautologie (im Sinne zweiwertiger Interpretationen) lässt sich mithilfe der Axiome und Beweistechniken aus diesem Kapitel herleiten.

In manchen Lehrbüchern und Vorlesungen werden die Junktoren über Wahrheitstafeln *definiert* und Beweistechniken aus Wahrheitstafeln „hergeleitet“. Beispielsweise wird dort die Tatsache, dass die Formel $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$ eine (zweiwertige) Tautologie im Sinne von [Definition §1.4.5](#) ist, zum „Beweis“ erklärt dafür, dass die Beweistechnik der indirekten Widerlegung ([Axiom §2.6.2](#)) zulässig ist.

Aufgrund des Vollständigkeitssatzes ist dieser Zugang legitim und liefert am Ende dieselben Beweistechniken, die im Laufe dieses Kapitels axiomatisch eingeführt wurden. In meinen Augen ist er jedoch irreführend, da er eine stufenweise Auseinandersetzung mit logischen Prinzipien verhindert und die Syntax von vornherein an eine unangemessen strikte Semantik koppelt (vgl. [Vorschau §1.4.1](#)).

§2.8.25 **Bemerkung.** Eine Liste mit vielen aussagenlogischen und prädikatenlogischen Tautologien findest du in [Anhang C](#). Such dir einmal zwei oder drei davon raus und versuche, sie zu beweisen.

§2.9 Aufgabenvorschläge

§2.9.1 **Aufgabe** ((Un)Logische Schlussfolgerungen). Seien A, B, C drei beliebige Aussagen und E, F, G drei Eigenschaften. Beurteilt die nachfolgenden Schlussfolgerungen danach, ob sie logisch haltbar sind:

Wenn sich niemand von uns ins Zeug legt, kriegen wir das Projekt nie im September fertig.

- a) $\frac{\text{Wir haben das Projekt im September fertig gekriegt.}}{\text{Also gilt: Jeder von uns hat sich ins Zeug gelegt.}}$

Im Sterben sagen alle Menschen die Wahrheit.

- b) $\frac{\text{Im Sterben sagte Siddhartha: „Alles Geschaffene ist vergänglich.“}}{\text{Also gilt: Alles Geschaffene ist vergänglich.}}$

Entweder ist der Butler oder der Koch der Mörder.

- c) $\frac{\text{Entweder ist der Koch oder der Gärtner der Mörder.}}{\text{Also gilt: Entweder ist der Butler oder der Gärtner der Mörder.}}$

- d) $\frac{A \rightarrow B}{C \rightarrow \neg B} \quad \frac{\exists x : F(x) \wedge G(x)}{\forall x : E(x) \rightarrow F(x)} \quad (\text{Modus Celarent})$
 $A \leftrightarrow \neg C \quad \exists x : E(x) \wedge G(x)$

ANNA: Wenn Ben verschläft, kommt er immer zu spät zur Vorlesung. Heute kam er schon wieder zu spät, also muss er mal wieder verschlafen haben.

CHLOE: Dir ist ein Fehlschluss unterlaufen. Du hast von $A \rightarrow B$ und B auf A geschlossen, aber diese Schlussweise ist nicht valide.

ANNA: Ups, stimmt ja. Also ist er heute mal pünktlich aufgestanden.

§2.9.2 **Aufgabe** (Fehlersuche I). Findet die Fehler in den folgenden Argumentationen¹⁸ und beweist, dass alle drei Sätze falsch sind:

- a) **Satz.** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 10$. Dann sind $x \neq 3$ und $y \neq 8$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann wären $x = 3$ und $y = 8$ und damit $x + y = 11 \neq 10$. ■

- b) **Satz.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

Beweis. Seien x, y gleich einer beliebigen reellen Zahl r . Dann ist

$$x^2 + xy - 2y^2 = r^2 + rr - 2r^2 = 0 \quad \blacksquare$$

- c) **Satz.** Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit m gerade und n ungerade. Dann ist $n^2 - m^2 = m + n$.

Beweis. Weil m gerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m = 2k$. Analog gibt es, da n ungerade ist, ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Es folgt

$$n^2 - m^2 = (2k + 1)^2 - (2k)^2 = (4k^2 + 4k + 1) - 4k^2 = 2k + (2k + 1) = m + n \quad \blacksquare$$

¹⁸entnommen aus [Vel06]

§2.9.3 **Aufgabe (Fehlersuche II).** Analysiert den folgenden Beweis. Enthält er Fehler oder Lücken? Stimmt der Satz überhaupt?

§2.9.4 **Satz.** Für jede natürliche Zahl m existiert eine natürliche Zahl n derart, dass keine der Zahlen $n + 1, n + 2, \dots, n + m$ eine Primzahl ist. Mit anderen Worten: Es gibt beliebig große Primzahllücken.

§2.9.5 **Beweis.** Für $m \in \mathbb{N}$ setze

$$n := (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \cdot (m + 1)) + 1$$

Dann ist $n + 1$ durch 2 teilbar, $n + 2$ durch 3 teilbar und allgemein $n + k$ durch $k + 1$ teilbar für jedes $k \leq m$. Also ist keine der Zahlen $n + 1, n + 2, \dots, n + m$ eine Primzahl. ■

§2.9.6 **Aufgabe (Das Dorf der Lügner).** Im beschaulichen Dörfchen Lügenscheid im Sauerland leben genau siebzig Menschen. Jeder dieser Einwohner

- sagt entweder immer die Wahrheit
- oder aber alles was er sagt ist immer gelogen.

Fasziniert von dieser Begebenheit reist Beate Weiß, eine Mathematik-Postdoktorandin aus Wahrschau, deren Habilitation im Bereich der angewandten Logik seit Monaten von ihrer Fakultät ausgebremst wird, um sie solange es geht mit prekären befristeten Anstellungen bei der Stange zu halten, in das Dorf, um endlich einen Aufhänger für ihre Arbeit zu finden. Nachdem sie sich im Gasthaus eingerichtet hat, lädt sie alle siebzig Einwohner nacheinander zu einer Befragung ein, bei der sie nur eine einzige Frage stellt: „Wieviele Einwohner dieses Dorfs lügen immer?“

Die erste Person, die zur Befragung erscheint, ein gutmütig aussehender, älterer Herr im Pullunder, sagt ihr, sie müsse sich keine Sorgen machen: im Dorf gebe es nur einen einzigen Lügner – alle anderen Einwohner sagten dagegen immer die Wahrheit.

Die zweite Person in der Befragung, eine großgewachsene, elegant gekleidete Dame mittleren Alters, sagt ihr, es gebe genau zwei Lügner im Ort.

So geht es immer weiter: Die dritte Person meint, es gebe genau drei Lügner im Dorf, die vierte Person sagt, es gebe genau vier Lügner, usw.

Als bereits der Abend angebrochen ist, erscheint endlich auch Einwohner Nummer siebzig, eine greise, etwas orientierungslos wirkende Dame, zur Befragung und krächzt: „Der Teufel soll uns holen. In diesem Dorf gibt es keinen einzigen ehrlichen Menschen. Wir alle sind dazu verflucht, tagein, tagaus zu lügen!“

Frau Weiß ist zufrieden: innerhalb eines Tages ist es ihr gelungen, jeden einzelnen Bewohner des Dorfs zu befragen. Bei einem Bierchen in der Ortskneipe knobelt sie über dem Ergebnis ihrer Studie und versucht herauszufinden, wieviele Lügner es denn nun tatsächlich in Lügenscheid gibt.

- a) Findet heraus, wieviele Lügner es in Lügenscheid gibt, und formuliert einen Beweis für eure Behauptung.
- b) Analysiert eure Argumentation. Welche Techniken (z.B. direkter Beweis, indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Fallunterscheidung) kommen darin zum Einsatz? Kann der Beweis vielleicht noch vereinfacht werden?

Kapitel 3

Mengen und Familien

In diesem Vortrag werden grundlegende Eigenschaften und Operationen von Mengen vorgestellt. Ebenso werden Familien, Tupel und Mengenprodukte eingeführt, da sie grundlegend für die Konzepte „Relation“, „Folge“ und „Verknüpfung“ in den späteren Vorträgen sind.

§3.1 Mengen und Elemente

Eine historische Definition des Mengenbegriffs wurde bereits in [Definition §1.1.5](#) gegeben.

§3.1.1 **Definition (Menge).** Eine **Menge** ist ein mathematisches Objekt, dem andere Objekte als ihre **Elemente** angehören können.

§3.1.2 **Notation (Elementzeichen).** Seien x irgendein Objekt und M eine Menge. Man schreibt

$$\begin{aligned} x \in M & \quad :\Leftrightarrow & x \text{ ist ein Element von } M & \quad (\text{lies: „}x \text{ in } M\text{“}) \\ x \notin M & \quad :\Leftrightarrow & x \text{ ist kein Element von } M & \quad (\text{lies: „}x \text{ nicht in } M\text{“}) \end{aligned}$$

Die Elementrelation \in ist ein zweistelliges Prädikat im Sinne von [Definition §1.3.1](#).

Für ein Objekt x und eine Menge M ergibt es nur Sinn, zu fragen, *ob* x ein Element von M ist – dagegen ergäbe es keinen Sinn, danach zu fragen, „an welcher Stelle“ oder „wie oft“ x ein Element von M wäre.

Der Mengenbegriff soll sich rein *extensiv* verhalten, d.h. eine Menge soll allein dadurch bestimmt sein, welche Elemente ihr angehören. Diese Forderung wird durch das sogenannte **Extensionalitätsaxiom** realisiert:

§3.1.3 **Axiom (Gleichheit von Mengen).** Zwei Mengen M, N stimmen genau dann überein, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Als Formel:

$$(\forall x : x \in M \leftrightarrow x \in N) \quad \leftrightarrow \quad M = N$$

Dementsprechend sind zwei Mengen *verschieden*, wenn mindestens eine der beiden ein Element enthält, das die andere nicht enthält.

§3.1.4 **Definition (Extension einer Eigenschaft).** Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Die Menge aller Objekte (vom Typ der Variablen x) mit der Eigenschaft E ist aufgrund des Extensionalitätsaxioms [Axiom §3.1.3](#) eindeutig bestimmt. Sie heißt die **Extension**¹ von E und wird notiert mit

$$\{x \mid E(x)\} \quad (\text{lies: „Menge aller } x, \text{ für die gilt: } E(x)\text{“})$$

In diesem Ausdruck fungiert das Zeichen „ x “ als gebundene Variable im Sinne von [Notation §1.1.17](#). Per Definition gilt:

$$\forall a : a \in \{x \mid E(x)\} \leftrightarrow E(a)$$

¹vgl. [Notation §1.3.4](#)

Für eine Menge M (von Objekten vom Typ der Variablen x) wird mit

$$\{x \in M \mid E(x)\} := \{x \mid x \in M \text{ und } E(x)\}$$

die Menge aller Elemente von M , die die Eigenschaft E besitzen, notiert.

§3.1.5 **Beispiel.** Das Konzept „Extension einer Eigenschaft“ erlaubt es, Mengen über Eigenschaften zu definieren. Zum Beispiel:

- (1) Es ist $\mathbb{P} := \{p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ die Menge aller Primzahlen. Beispielsweise sind $23 \in \mathbb{P}$ und $97 \in \mathbb{P}$, denn 23 und 97 sind Primzahlen. Dagegen ist $91 \notin \mathbb{P}$, denn 91 ist keine Primzahl wegen $91 = 7 \cdot 13$.
- (2) Es ist $\{x \mid x \text{ liest dieses Vorkursskript}\}$ die Menge aller Leser dieses Skripts. Zum Beispiel bist DU ein Element dieser Menge.
- (3) Es ist $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ die Menge aller reellen Zahlen zwischen Null und Eins, das sogenannte (abgeschlossene) *Einheitsintervall*. (Für allgemeine Intervalle siehe [Definition §5.2.17](#))
- (4) Es ist $Q := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\}$ die Menge aller Quadratzahlen. Beispielsweise sind $100 \in Q$ und $529 \in Q$, aber $12 \notin Q$ und $1000 \notin Q$.

§3.1.6 **Notation** (*Definition einer Menge durch Auflistung ihrer Elemente*). Seien $n \in \mathbb{N}$ und a_1, \dots, a_n eine Handvoll Objekte. Dann bezeichnet

$$\{a_1, \dots, a_n\} := \{x \mid x = a_1 \text{ oder } \dots \text{ oder } x = a_n\}$$

diejenige Menge, die genau aus a_1, \dots, a_n besteht. Auf diese Weise kannst du Mengen mit „wenigen“ Elementen über eine Auflistung aller ihrer Elemente definieren.

§3.1.7 **Beispiel.** Zum Beispiel ist

$$M := \{2, 3, 5, 7\}$$

diejenige Menge, die genau aus den Zahlen 2, 3, 5 und 7 besteht.

§3.1.8 **Bemerkung.** Gelegentlich werden auch Mengen mit unendlich vielen Elementen über eine Art „Auflistung“ definiert, zum Beispiel

$$M := \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

Diese Art von „Definition“ setzt beim Leser das Erkennen eines intendierten Musters voraus und kann zu Missverständnissen führen. Im Zweifelsfall solltest du eine Definition über eine Eigenschaft bevorzugen. In diesem Fall wäre das

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$$

§3.1.9 **Notation.** Seien $E(x)$ eine Eigenschaft und M eine Menge (von Objekten vom Typ der Variablen x). Für Aussagen über die Elemente von M gibt es folgende Schreibweisen²

$$\forall x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \rightarrow E(x))$$

(lies: „Für jedes x aus M gilt $E(x)$ “)

$$\exists x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \exists x : (x \in M \wedge E(x))$$

(lies: „Es gibt ein x in M , für das $E(x)$ gilt“)

$$\nexists x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \nexists x : (x \in M \wedge E(x))$$

(lies: „Es gibt kein x in M , für das $E(x)$ gilt“)

$$\exists! x \in M : E(x) \quad : \Leftrightarrow \quad \exists! x : (x \in M \wedge E(x))$$

(lies: „Es gibt genau ein x in M , für das $E(x)$ gilt“)

um auszudrücken, dass jedes/mindestens eines/keines/genau eines der Elemente von M die Eigenschaft E besitzt.

§3.1.10 **Beispiel.** Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot (n + 1) \text{ ist eine gerade Zahl} \quad (\text{vgl. Beispiel §2.4.8})$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^5 = x + 1 \quad (\text{vgl. Beispiel §2.5.20})$$

$$\nexists n \in \mathbb{N} : 17 \cdot n = 198 \quad (\text{vgl. Beispiel §2.6.3})$$

$$\exists! a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : ax = a \quad (\text{vgl. Beispiel §2.5.27})$$

§3.2 Teilmengen

§3.2.1 **Definition (Teilmenge).** Seien M und N zwei Mengen. M heißt eine **Teilmenge** (manchmal auch: **Untermenge**) von N (und N eine **Obermenge** von M), falls jedes Element von M auch ein Element von N ist. Notation:

$$M \subseteq N \quad : \Leftrightarrow \quad M \text{ ist eine Teilmenge von } N$$

$$M \not\subseteq N \quad : \Leftrightarrow \quad M \text{ ist keine Teilmenge von } N$$

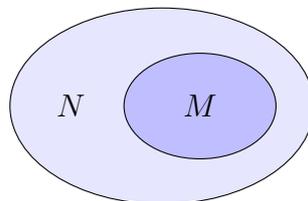


Abbildung 3.1: Die Menge M ist eine Teilmenge der Menge N .

²vgl. Definition §1.3.7, Definition §1.3.9 und Definition §1.3.17

§3.2.2 **Bemerkung** (*Teilmengeninklusionen beweisen/widerlegen*). Seien M, N zwei Mengen. Da es sich bei der Aussage „ $M \subseteq N$ “ um eine Allaussage handelt (*jedes* Element von M ist ein Element von N), kannst du sie mit der Technik aus **Axiom** §2.5.8 beweisen: fixiere ein beliebiges Element von M und zeige irgendwie, dass es auch ein Element von N ist.

Wenn du meinst, dass „ $M \subseteq N$ “ eine falsche Aussage ist, kannst du sie mit der Technik aus **Satz** §2.6.5 widerlegen: finde ein Element von M , das kein Element von N ist.

§3.2.3 **Beispiel**

(1) Es ist $\{s \mid s \text{ ist ein Spartaner}\} \subseteq \{g \mid g \text{ ist ein Grieche}\}$, da alle Spartaner Griechen sind.

(2) Es ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(3) Es ist $\{\text{Regelmäßige Mensa-Essen}\} \not\subseteq \{\text{Mahlzeiten, die nicht satt machen}\}$. Beispielsweise fand ich die Schupfnudelpfanne immer ordentlich sättigend.

§3.2.4 **Satz** (*Eigenschaften von \subseteq*). Seien L, M, N drei Mengen. Dann gilt:

a) (*Reflexivität*) $M \subseteq M$.

b) (*Transitivität*) Aus $L \subseteq M$ und $M \subseteq N$ folgt $L \subseteq N$.

c) (*Antisymmetrie*) Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $M = N$.

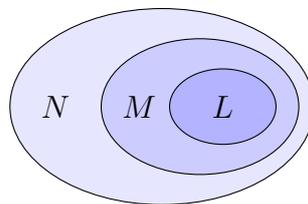


Abbildung 3.2: Illustration der Transitivität von \subseteq

§3.2.5 **Beweis.** a) Für alle Elemente $m \in M$ gilt per se schon $m \in M$. Also ist M in M enthalten.³

b) Sei $x \in L$ beliebig. Wegen $L \subseteq M$ gilt dann $x \in M$. Aus $x \in M$ folgt wegen $M \subseteq N$, dass auch $x \in N$. Da das Element $x \in L$ beliebig gewählt war, ist damit $L \subseteq N$ bewiesen.⁴

c) Seien $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$, sowie x beliebig. Dann gilt $x \in M \leftrightarrow x \in N$, denn:

„ \Rightarrow “ folgt aus $M \subseteq N$.

„ \Leftarrow “ folgt aus $N \subseteq M$.

Weil x beliebig gewählt war, folgt nun aus **Axiom** §3.1.3 die Gleichheit $M = N$.⁵ ■

³vgl. **Satz** §2.2.5: Jede Aussage impliziert sich selbst.

⁴Das war ein direkter Beweis mit Zwischenschritten, vgl. **Satz** §2.2.14: $x \in L \xrightarrow{L \subseteq M} x \in M \xrightarrow{M \subseteq N} x \in N$

⁵Das war ein Äquivalenzbeweis per Hin- und Rückrichtung, vgl. **Axiom** §2.3.1.

§3.2.6 **Notation (Echte Teilmenge).** Nach **Satz** §3.2.4 ist jede Menge eine Teilmenge von sich selbst. Manchmal möchte man im Umgang mit Teilmengen diese eine „triviale“ Teilmenge ausschließen. Für Mengen M, N definiert man daher: M heißt eine **echte Teilmenge** von N , falls M eine Teilmenge von N ist, aber die Obermenge N strikt größer ist. Notation:

$$M \subsetneq N \quad :\Leftrightarrow \quad M \subseteq N \quad \wedge \quad \exists x \in N : x \notin M$$

\subseteq und \subsetneq unterscheiden sich in derselben Hinsicht wie \leq und $<$. Siehe dazu **Notation** §5.2.4.

Bisweilen werden in der Literatur auch abweichende Schreibweisen benutzt: etwa $M \subseteq N$ für beliebige und $M \subset N$ für echte Teilmengen; oder aber $N \subset M$ für beliebige und $M \subsetneq N$ für echte Teilmengen.

	Teilmenge	echte Teilmenge
Dieser Text	\subseteq	\subsetneq
Alternative 1	\subseteq	\subset
Alternative 2	\subset	\subsetneq oder \subsetneq

Aufgrund seiner Mehrdeutigkeit werde ich das Zeichen \subset nicht verwenden.

§3.2.7 **Beispiel.**

- Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.
- Es ist $\{\text{Spartaner}\} \subsetneq \{\text{Griechen}\}$. Zum Beispiel ist Thales von Milet⁶ ein Grieche, der nicht aus Sparta stammt.

§3.2.8 **Bemerkung (Gleichheit von Mengen beweisen).** Aus **Bemerkung** §3.2.2 und **Satz** §3.2.4 ergibt sich eine Methode, die Gleichheit zweier Mengen M, N zu zeigen:

„ \subseteq “ In einem ersten Schritt beweise, dass jedes Element von M auch in N liegt.

„ \supseteq “ Im zweiten Schritt beweise, dass auch jedes Element von N in M liegt.

In Beweisen solltest du die Abschnitte, die den einzelnen Inklusionen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gewidmet sind, mit Markierungen deutlich machen.

§3.2.9 **Beispiel.** Es ist $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 3, 2\}$.

§3.2.10 **Beweis.** „ \subseteq “ Sei $x \in \{1, 2, 3\}$, also $x = 1$, $x = 2$ oder $x = 3$. In jedem dieser Fälle⁷ gilt auch $x \in \{1, 1, 3, 2\}$.

„ \supseteq “ Sei umgekehrt $x \in \{1, 1, 3, 2\}$, also $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$ oder $x = 2$. In jedem dieser Fälle gilt auch $x \in \{1, 2, 3\}$. ■

§3.2.11 **Bemerkung.** An diesem Beispiel wird deutlich, dass die Elemente einer Menge keiner Reihenfolge oder „Platzierung“ unterliegen. Eine Menge M trägt von sich aus bis auf ihre Elemente keine weitere Struktur. Fragen wie „Wie genau / Wie oft / An welcher Stelle ist x in M enthalten?“ kann sie nicht beantworten, sondern nur: „Ist x in M enthalten (oder nicht)?“ Zwar lässt sich durchaus fragen, wie viele Objekte einer gewissen Sorte in M enthalten sind – beispielsweise wieviele gelbe M&Ms in einem

⁶Thales von Milet (ca. 6. Jhd. v. Chr.)

⁷vgl. **Notation** §3.1.6 und **Axiom** §2.4.7

Päckchen enthalten sind – aber eben nicht, wie oft ein- und dasselbe Objekt in M liegt. Hinsichtlich der Dualität zwischen Syntax und Semantik (**Bemerkung** §5.1.18) entsprechen Mengen Eigenschaften. Und es lässt sich ja auch nicht fragen, „wie oft“ ein Objekt eine gewisse Eigenschaft besitzt, sondern nur, *ob* es sie besitzt (oder nicht).

Um den Elementen dennoch verschiedene „Plätze“ zuzuweisen, können *Familien*, die später in **Definition** §3.5.1 eingeführt werden, verwendet werden. Ein weiteres Konzept, das die Elemente einer Menge in eine Art „Reihenfolge“ bringt, sind *Ordnungsrelationen*, die in **Abschnitt** §5.2 eingeführt werden.

§3.3 Die leere Menge

§3.3.1 **Definition.** Eine Menge heißt

- **leer**, wenn sie gar keine Elemente enthält.
- **nichtleer**, wenn sie nicht leer ist.⁸
- eine **Einermenge** (englisch: “singleton”), wenn sie genau ein Element enthält, also von der Form $\{x\}$ für irgendein Objekt x ist.

§3.3.2 **Satz.** *Es gibt genau eine leere Menge.*

Ich werde den Beweis noch eine Weile aufschieben und in **Beweis** §3.3.9 nachreichen.

§3.3.3 **Notation** (*Die leere Menge*). Im Sinne von **Notation** §1.3.20 können wir daher von *der* leeren Menge sprechen. Die leere Menge wird meist notiert mit

$$\emptyset$$

Angelehnt an **Notation** §3.1.6 notieren manche Autoren die leere Menge auch mit „ $\{\}$ “.

§3.3.4 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) Die Menge $M := \{p \mid p \text{ ist eine gerade Primzahl}\}$ ist nichtleer, weil die 2 eine gerade Primzahl ist. Weil 2 auch die einzige gerade Primzahl ist, ist sogar $M = \{2\}$, d.h. M ist eine Einermenge.
- (2) Die Menge $M := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 6\}$ ist leer, d.h. $M = \emptyset$, da die 6 keine rationale Quadratwurzel besitzt.

§3.3.5 **Bemerkung** (*vacuous truths*). Betrachte einmal die beiden Allaussagen:

- „Alle rosa Elefanten können fliegen.“
- „Jedes fünfeckige Rechteck ist ein Quadrat.“

Sowohl die Menge der rosa Elefanten als auch die Menge der fünfeckigen Rechtecke ist leer. Beide Allaussagen quantifizieren lediglich über eine leere Menge, sind also von der Gestalt

$$\forall x \in \emptyset : E(x)$$

für eine gewisse Eigenschaft E . Es mag vielleicht überraschend klingen: Aussagen dieser Form sind grundsätzlich wahr!

⁸Im Englischen heißt eine Menge “**inhabited**”, wenn sie mindestens ein Element enthält.

§3.3.6 **Beweis.** Gemäß **Notation** §3.1.9 ist obige Formel gleichbedeutend zu

$$\forall x : \quad x \in \emptyset \rightarrow E(x)$$

Sei nun x ein beliebiges Objekt (hier kommt die Beweistechnik aus **Axiom** §2.5.8 zum Einsatz). Die Aussage $x \in \emptyset$ ist falsch, da die leere Menge keine Elemente enthält. Nach dem Prinzip *ex falso quodlibet* aus **Satz** §2.7.3 ist dann die Implikation $x \in \emptyset \rightarrow E(x)$ eine wahre Aussage. Weil das Objekt x beliebig gewählt war, ist somit die Allaussage $\forall x : (x \in \emptyset \rightarrow E(x))$ bewiesen. ■

Aussagen, die den Elementen einer leeren Menge eine gewisse Eigenschaft zuordnen, etwa dass alle rosa Elefanten fliegen können oder dass jedes fünfeckige Rechteck ein Quadrat ist, sind also stets wahr, egal um welche Eigenschaft es sich handelt. Solche „leeren Wahrheiten“ werden im Englischen „vacuous truths“ genannt.

§3.3.7 **Satz.** Sei M eine Menge. Dann gilt $\emptyset \subseteq M$.

Mit anderen Worten: Die leere Menge \emptyset ist Teilmenge einer jeden beliebigen Menge.

§3.3.8 **Beweis.** Zu zeigen ist, dass jedes Element von \emptyset auch ein Element von M ist. Dies ist eine „vacuous truth“ und somit eine wahre Aussage. ■

§3.3.9 **Beweis** (von **Satz** §3.3.2). Es gibt genau eine leere Menge, denn:

(Existenz): Sei \perp irgendeine Eigenschaft, die kein einziges Objekt besitzt (z.B. „ $x \neq x$ “). Dann ist $\{x \mid \perp\}$ eine leere Menge.

(Eindeutigkeit): Seien M, N zwei leere Mengen. Nach **Satz** §3.3.7 sind es zwei „vacuous truths“, dass jedes Element von M auch eines von N ist (also $M \subseteq N$) und ebenso jedes Element von N auch eines von M (also $N \subseteq M$). Aus **Satz** §3.2.4c) folgt dann $M = N$. ■

§3.4 Die Potenzmenge

§3.4.1 **Definition** (Potenzmenge). Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt die **Potenzmenge** von M und wird mit „ $\mathcal{P}(M)$ “ notiert:

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \text{ ist eine Teilmenge von } M\}$$

§3.4.2 **Beispiel.**

(1) (Triviale Teilmengen) Sei M eine Menge. Nach **Satz** §3.3.7 und **Satz** §3.2.4a) gilt auf jeden Fall $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.

(2) Für $M = \{1, 2, 3\}$ ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

In manchen Büchern wird die Potenzmenge einer Menge M mit „ 2^M “ notiert, woher der Name „Potenzmenge“ stammt. Es lässt sich zeigen: ist $n \in \mathbb{N}$ und enthält die Menge M genau n -viele Elemente, so enthält $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n -viele Elemente.

§3.4.3 **Bemerkung.** Die Konzepte „Einermenge“ und „Potenzmenge“ erlauben es, Elementaussagen und Teilmengenaussagen ineinander zu überführen. Denn für Mengen M, N und Objekte x gilt:

$$x \in M \leftrightarrow \{x\} \subseteq M \quad \text{sowie} \quad M \subseteq N \leftrightarrow M \in \mathcal{P}(N)$$

§3.4.4 **Vorschau** (*Mengen von Mengen von Mengen von ...). Das Konzept der Menge ist iterativ. Eine Menge kann auch wieder Element einer Menge sein, die wiederum in einer Menge enthalten sein kann usw.

- (1) Zum Beispiel ist die Menge \mathbb{N} ein Element der Einermenge $\{\mathbb{N}\}$, die wiederum ein Element der dreielementigen Menge $\{\{\mathbb{N}\}, 4, \mathbb{Z}\}$ ist.
- (2) (Zermelo'sche Zahlreihe) Es ist \emptyset eine Menge, die überhaupt keine Elemente enthält, wohingegen $\{\emptyset\}$ eine Einermenge ist, deren einziges Element das Objekt \emptyset ist. Insbesondere ist $\{\emptyset\}$ eine nichtleere Menge, also $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Somit haben auch die beiden Einermengen $\{\{\emptyset\}\}$ und $\{\emptyset\}$ zwei verschiedene Elemente, sind also ebenfalls voneinander verschieden. Iterativ erhält man eine unendliche Folge paarweise verschiedener Mengen:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \dots$$

welche auch *Zermelo'sche Zahlreihe* genannt wird.

- (3) Damit verwandt ist das **von Neumannsche Modell der natürlichen Zahlen**. Beide Konstruktionen ermöglichen die Simulation natürlicher Zahlen durch gewisse Mengen und demonstrieren dadurch, dass sich der Begriff der natürlichen Zahl, wenn man es denn will, zurückführen lässt auf den Begriff der Menge.
- (4) (Von-Neumann-Universum) Sei X eine Menge und für $n \in \mathbb{N}$ sei⁹

$$\mathcal{P}^n(X) := \underbrace{\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(X))}_{n\text{-mal}} \quad \text{und} \quad V_n(X) := X \cup \mathcal{P}^1(X) \cup \dots \cup \mathcal{P}^n(X)$$

Man erhält eine aufsteigende Folge von Mengen

$$X = V_0(X) \subseteq V_1(X) \subseteq V_2(X) \subseteq V_3(X) \subseteq \dots$$

Aber diese *kumulative Hierarchie* erschöpft sich selbst im Unendlichen nicht: Setzt man $V_\infty(X) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(X)$, so lässt sich im Anschluss ja fortfahren, indem man für $n \in \mathbb{N}$ definiert:

$$V_{\infty+n}(X) := V_\infty(X) \cup \mathcal{P}^1(V_\infty(X)) \cup \dots \cup \mathcal{P}^n(V_\infty(X))$$

So geht es immer weiter. Die Gesamtheit aller Mengen, die sich auf diesem Wege erzeugen lassen, also alle Mengen, deren Elemente sich in (möglicherweise unendlicher) verschachtelter Gestalt als „Mengen von Mengen von ... von Elementen von X “ schreiben lassen, heißt das von X erzeugte *Von-Neumann-Universum*.¹⁰

In der gewöhnlichen Mathematik werden davon nur die ersten paar Stufen benötigt. Beispielsweise verwendet man \mathbb{R} zum Rechnen, $V_1(\mathbb{R})$ zum Untersuchen von Stetigkeit und $V_2(\mathbb{R})$ zum Vergleich verschiedener Topologien auf \mathbb{R} .

§3.4.5 **Definition** (*Mengensystem*). Eine Menge \mathcal{M} heißt ein **Mengensystem**, wenn jedes ihrer Elemente ebenfalls eine Menge ist.

Ist M irgendeine Menge, so ist beispielsweise jede Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein Mengensystem. Man nennt dann \mathcal{T} auch ein **System von Teilmengen von M** .

⁹Zur Definition von \cup siehe Abschnitt §3.6.

¹⁰vgl. **Vorschau** §1.3.23

§3.5 Familien

Mit dem Begriff der Familie können wir einer Sammlung von Objekten eine zusätzliche Struktur verleihen: Statt uns nur zu merken, welche Objekte in unserer Sammlung enthalten sind (wie dies bei Mengen der Fall ist), unterscheiden wir nun verschiedene „Stellen“, an denen sich Objekte in der Sammlung befinden können. Realisiert wird das, indem wir die Objekte unserer Sammlung mit Indizes versehen und dann von dem „Objekt mit Index i / an der Stelle i “ sprechen:

§3.5.1 **Definition (Familien).** Eine **Familie** a besteht aus

- Einer beliebigen Menge I , welche die **Indexmenge** der Familie genannt wird und deren Elemente die **Indizes** der Familie heißen.
- Für jeden Index $i \in I$ ein Objekt „ a_i “, welches der **Eintrag an der i -ten Stelle** oder die **i -te Komponente** der Familie a genannt wird.

Die Familie a wird dann notiert als

$$(a_i)_{i \in I} \quad (\text{lies: „}a_i, i \text{ aus } I\text{“})$$

Man spricht auch von einer *Familie mit Indexmenge I* oder einer **durch I indizierten Familie**.

§3.5.2 **Axiom (Gleichheit von Familien).** Sind I irgendeine Menge und $(a_i)_{i \in I}$ und $(b_i)_{i \in I}$ zwei durch I indizierte Familien, so sind diese beiden Familien genau dann gleich, wenn sie an jedem Index denselben Eintrag besitzen. Als Formel:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \leftrightarrow \quad \forall i \in I : a_i = b_i$$

Dementsprechend sind zwei solche Familien *verschieden*, wenn sie sich an mindestens einem Index unterscheiden.

Zwei Familien mit verschiedenen Indexmengen sind von vornherein voneinander verschieden.

§3.5.3 **Notation.**

- Wenn ich, ohne vorher die Menge I definiert zu haben, so etwas wie „Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie“ schreibe, so meine ich damit „Sei I eine beliebige Menge und $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie mit Indexmenge I “.
- Sei $a = (a_i)_{i \in I}$ eine Familie. Dann bezeichnet

$$\{a_i \mid i \in I\} := \{x \mid \exists i \in I : x = a_i\}$$

die Menge der Einträge der Familie a . Beim Übergang von $(a_i)_{i \in I}$ zu $\{a_i \mid i \in I\}$ wird die Indizierung „vergessen“.

§3.5.4 **Beispiel.**

- (1) Nehmen wir als Indexmenge I die Menge der belegten Stühle im Raum und als das Objekt a_i die Person, die auf Stuhl i sitzt, so erhalten wir eine Familie der hier im Raum sitzenden Leute $(a_i)_{i \in I}$. Sie unterscheidet sich von der *Menge* der hier im Raum sitzenden Leute dadurch, dass sie auch die Information darüber, wer auf welchem Stuhl sitzt, enthält.

Sind $i, j \in I$ zwei belegte Stühle und tauschen die Personen a_i, a_j auf diesen beiden Stühlen ihre Plätze, so wird aus der Familie $(a_i)_{i \in I}$ der im Raum sitzende Leute eine neue Familie $(b_i)_{i \in I}$. Diese beiden Familien sind nicht gleich, denn es gilt $b_i = a_j \neq a_i$ und $b_j = a_i \neq a_j$.

Dagegen hat sich die Menge der im Raum sitzenden Leute durch den Sitzplatzwechsel nicht verändert, da sich noch immer dieselben Leute im Raum befinden (nur eben an anderen Stellen). Bei $\{a_i \mid i \in I\}$ und $\{b_i \mid i \in I\}$ handelt es sich also um dieselbe Menge, während $(a_i)_{i \in I}$ und $(b_i)_{i \in I}$ zwei verschiedene Familien sind.

Hieran wird der Unterschied zwischen den Begriffen „Familie“ und „Menge“ deutlich. Zwei Mengen, welche genau dieselben Elemente enthalten, sind nach **Axiom** §3.1.3 schon gleich; für eine Gleichheit von Familien müssen dagegen die Elemente sich auch noch an denselben „Stellen“ befinden. Im Gegensatz zu Mengen haben Familien also eine gewisse, durch die Indizierung gegebene, Zusatzstruktur.

- (2) Bei Matrizen sowie den “arrays” aus der Informatik handelt es sich um spezielle Familien, siehe **Beispiel** §3.6.11.

§3.5.5 **Definition (Menge der Familien).** Seien I, M zwei beliebige Mengen und $(a_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Familie. Ist jedes der a_i 's ein Element von M , so nennt man die Familie $(a_i)_{i \in I}$ eine (**durch I indizierte**) **Familie mit Einträgen aus M** oder auch eine **M -wertige Familie**.

Die Menge aller Familien mit Indexmenge I und Einträgen aus M wird mit M^I notiert:

$$M^I := \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : a_i \in M\}$$

M^I heißt auch die „ I -te Potenz von M “, was aber nicht mit der Potenzmenge aus **Definition** §3.4.1 verwechselt werden sollte.

§3.5.6 **Beispiel (*Folgen).** Familien, deren Indexmenge die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist, heißen **Folgen** und sind ein zentrales Thema in **Kapitel 7**. Für eine Menge X ist $X^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen mit Einträgen aus X . Im Fall $X = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Zahlenfolgen*. Elemente des „Folgenraums“ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wären beispielsweise die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	1/2	1/3	1/4	1/5	...

oder die Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ der Quadratzahlen. Analog sind $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ die Mengen aller Folgen mit ganzzahligen/rationalen/komplexen Einträgen. Die Konstruktion ist iterierbar: Beispielsweise ist $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen von Folgen von ganzen Zahlen.

§3.5.7 **Definition (Tupel).** Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Familien $(a_i)_{i \in I}$ mit der Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ heißen **n -Tupel** und werden notiert in der Gestalt

$$(a_1, \dots, a_n)$$

2-Tupel, also Objekte der Form (a, b) , heißen (**geordnete**) **Paare**, 3-Tupel werden auch **Tripel** genannt.

Ist A eine Menge, so bezeichnet „ A^n “ die Menge aller n -Tupel mit Einträgen aus A :

$$A^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$$

Gemäß **Axiom** §3.5.2 stimmen zwei n -Tupel genau dann überein, wenn sie komponentenweise übereinstimmen:

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

§3.5.8 **Beispiel.** Es ist \mathbb{R}^3 die Menge aller Tripel reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Diese Menge ist dir vielleicht schon aus der Schule bekannt. In der analytischen Geometrie repräsentieren die Elemente des \mathbb{R}^3 Punkte im Raum und die drei Einträge eines solchen Tripels repräsentieren seine Koordinaten bezüglich eines fixierten Koordinatensystems. In der Matrizenrechnung werden die Komponenten in einer senkrechten Anordnung notiert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man spricht von „Vektoren“. Hier wird auch die Signifikanz des Tupelbegriffs deutlich: Beispielsweise sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Vektoren, denn sie unterscheiden sich in ihrer zweiten und dritten Komponente. Dagegen sind die Mengen $\{2, 0, 3\}$ und $\{2, 3, 0\}$ identisch¹¹. Bei einer bloßen Menge gibt es keinen „zweiten Eintrag“ oder dergleichen.

§3.5.9 **Definition** (* *Leere Familie*). Es gibt genau eine Familie, deren Indexmenge die leere Menge ist. Weil diese Familie keine Indizes hat, besitzt sie auch keine Einträge. Man spricht von der **leeren Familie** und notiert sie, ebenso wie die leere Menge, mit dem Zeichen \emptyset .

§3.5.10 **Bemerkung** (* „Niedrige“ *Potenzen*). Sei M eine beliebige Menge.

- (Nullte Potenz) Es ist eine „vacuous truth“, dass alle Einträge der leeren Familie Elemente von M sind. Daher ist $M^0 = \{\emptyset\}$ eine Einermenge, die als einziges Element die leere Familie enthält. Dies entspricht der Rechenregel $x^0 = 1$ für jede Zahl x .
- (Erste Potenz) Es ist $M^1 = \{(x) \mid x \in M\}$ die Menge aller „Eins-Tupel“ von Elementen aus M . Deren Elemente entsprechen letztendlich genau den Elementen von M . Oftmals wird zwischen M und M^1 gar nicht unterschieden, was der Rechenregel $x^1 = x$ entspricht.¹²

§3.6 Operationen mit Mengen

Durchschnitt und Vereinigung

§3.6.1 **Definition.** Seien M, N zwei Mengen.

- Der **Schnitt**¹³ (oder auch **Durchschnitt** oder die **Schnittmenge**) von M und N

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} \quad (\text{lies: „}M \text{ geschnitten } N\text{“})$$

ist die Menge aller Objekte, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

¹¹vgl. **Beispiel** §3.2.9

¹²In der Sprache von **Definition** §4.6.7 heißt das: Man hat eine „natürliche Bijektion“ zwischen M und M^1 . Für eine lange Liste weiterer Mengen, die auf eine solche Weise miteinander „identifiziert“ werden können, siehe **Anhang C.7**.

¹³Die Bezeichnung kommt aus der Geometrie, wo der *Schnittpunkt* zweier Geraden genau derjenige Punkt ist, der auf beiden Geraden zugleich liegt.

- Die **Vereinigung** von M und N

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} \quad (\text{lies: „}M \text{ vereinigt } N\text{“})$$

besteht aus denjenigen Objekten, die in mindestens einer der beiden Mengen M, N enthalten sind.

- Die **Differenzmenge** von M und N

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} \quad (\text{lies: „}M \text{ ohne } N\text{“})$$

ist die Menge aller Elemente von M , die nicht in N enthalten sind.

Manche Autoren schreiben auch „ $M - N$ “ für die Differenzmenge. Ist N eine Teilmenge von M , so schreibt man auch

$$N^c := M \setminus N \quad (\text{sofern } N \subseteq M)$$

und spricht vom (**relativen**) **Komplement von N (in M)**. Beachte, dass diese Schreibweise nur Sinn ergibt, wenn aus dem Kontext heraus klar ist, dass das Komplement in der Obermenge M zu bilden ist. Manche Autoren schreiben auch „ $\mathcal{C}_M(N)$ “ für das Komplement von N in M . Ich werde diese Schreibweise aber nicht verwenden.

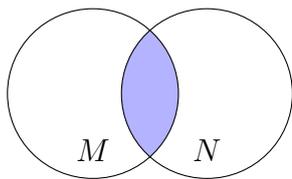


Abbildung 3.3: Schnitt $M \cap N$

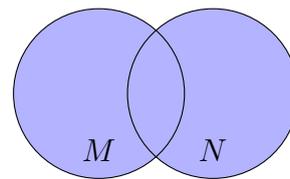


Abbildung 3.4: Vereinigung $M \cup N$

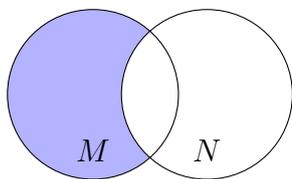


Abbildung 3.5: Differenz $M \setminus N$

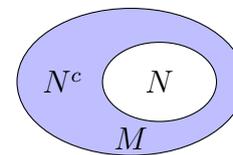


Abbildung 3.6: Komplement von N in M

§3.6.2 **Beispiel.**

- (1) Seien $M = \{1, 2, 4\}$ und $N = \{1, 4, 7\}$. Dann gilt:

$$M \cap N = \{1, 4\} \quad M \cup N = \{1, 2, 4, 7\} \quad M \setminus N = \{2\}$$

- (2) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$n\mathbb{Z} := \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : m = kn\}$$

die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von n , d.h. aller ganzen Zahlen, die durch n teilbar sind. Dann wurde in **Beispiel** §2.3.2 bewiesen, dass

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt allgemein $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$, wobei „ $\text{kgV}(m, n)$ “ das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n bezeichnet.

§3.6.3 **Definition (Mengenfamilie).** Eine **Mengenfamilie** (oder auch: *Familie von Mengen*) ist eine Familie, deren Einträge allesamt Mengen sind.

§3.6.4 **Beispiel.** Beispielsweise ist $(\{1, \dots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Teilmengen von \mathbb{N} , deren Einträge genau die „Anfangsabschnitte“ von \mathbb{N} sind.

§3.6.5 **Definition (Schnitte und Vereinigungen beliebig vieler Mengen).** Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Es heißen

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\} \qquad \bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

der **Durchschnitt** und die **Vereinigung** der M_i 's.

Ist \mathcal{M} eine Menge, deren Elemente ebenfalls allesamt Mengen sind, so schreibt man

$$\bigcap \mathcal{M} := \{m \mid \forall M \in \mathcal{M} : m \in M\} \qquad \bigcup \mathcal{M} := \{m \mid \exists M \in \mathcal{M} : m \in M\}$$

und spricht von *Durchschnitt* und *Vereinigung* von \mathcal{M} .

§3.6.6 **Notation.** Ist die Indexmenge von der Form $I = \{1, \dots, n\}$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man:¹⁴

$$M_1 \cap \dots \cap M_n := \bigcap_{i=1}^n M_i := \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i$$

$$M_1 \cup \dots \cup M_n := \bigcup_{i=1}^n M_i := \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i$$

§3.6.7 **Beispiel.** Sei H die Menge aller Lustigen Taschenbücher und für $h \in H$ sei L_h die Menge aller Menschen, die das Comibuch h gelesen haben. Dann ist $\bigcap_{h \in H} L_h$ die Menge aller Leute, die *jedes* LTB gelesen haben. Dagegen ist $\bigcup_{h \in H} L_h$ die Menge aller Leute, die schonmal irgendein LTB gelesen haben.

§3.6.8 **Bemerkung (Mengen-Operatoren vs. Aussagen-Operatoren).** Die Operationen \cap und \cup sind in gewisser Weise mengentheoretische „Realisierungen“ der aussagenlogischen Junktoren \wedge und \vee . Deshalb sehen sich auch die Zeichen so ähnlich. Trotzdem solltest du \cap und \cup sorgfältig von \wedge und \vee unterscheiden: Der Ausdruck „ $M \cap N$ “ ergibt nur Sinn, wenn M und N Mengen sind; der Ausdruck „ $A \wedge B$ “ dagegen nur, wenn A und B Aussagen sind.

Mengenoperation:	$M \cap N$	$M \cup N$	N^c	$\bigcap_{i \in I} M_i$	$\bigcup_{i \in I} M_i$
Logikoperation:	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg B$	$\forall x : E(x)$	$\exists x : E(x)$

Produkt

§3.6.9 **Definition (Produkte von Mengen).** Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Die Menge

$$\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in M_i\}$$

¹⁴vgl. **Notation** §6.4.12

aller durch I indizierten Familien, an deren i -ter Stelle jeweils ein Element aus M_i steht (für jedes $i \in I$), heißt das **(kartesische) Produkt** der M_i 's.

Ist die Indexmenge von der Gestalt $I = \{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man¹⁵

$$M_1 \times \dots \times M_n := \prod_{i=1}^n M_i := \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i$$

Per Definition ist

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}$$

die Menge aller n -Tupel, deren i -ter Eintrag jeweils ein Element von M_i ist (für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$). Insbesondere ist für zwei Mengen M und N

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\} \quad (\text{lies: „}M \text{ kreuz } N\text{“})$$

die Menge aller geordneten Paare, deren erster Eintrag aus M und deren zweiter Eintrag aus N stammt. Man spricht vom (*kartesischen*) *Produkt* von M und N .

§3.6.10 Beispiel.

(1) Es ist

$$\{2, 3, 4\} \times \{\clubsuit, \heartsuit\} = \{(2, \clubsuit), (3, \clubsuit), (4, \clubsuit), (2, \heartsuit), (3, \heartsuit), (4, \heartsuit)\}$$

(2) Es ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ und die Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ können als Koordinaten von Punkten in der Ebene interpretiert werden. Die Grundidee der analytischen Geometrie, Punkte und geometrische Figuren mithilfe von Koordinatensystemen als Lösungsmengen algebraischer Gleichungen zu beschreiben, wird traditionell Descartes¹⁶ (latinisiert: Cartesius) zugeschrieben. Daher die Rede vom „kartesischen“ Produkt.

§3.6.11 Beispiel (* Matrizen und arrays).

(1) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$M \times N = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n\}$$

die Menge aller Paare natürlicher Zahlen, deren erster Eintrag zwischen 1 und m und deren zweiter Eintrag zwischen 1 und n liegt.

Familien mit Indexmenge $M \times N$ werden **($m \times n$)-Matrizen** genannt. Die Einträge einer Matrix werden in einem zweidimensionalen Schema (in „Matrixgestalt“) aufgelistet, wobei der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte markiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

¹⁵vgl. Notation §6.4.12

¹⁶René Descartes (1596-1650)

Ist M irgendeine Menge, so wird mit

$$M^{m \times n} := M^{\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}$$

die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen mit Einträgen aus M notiert. Beispielsweise ist $\mathbb{R}^{m \times n}$ die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen, deren Einträge reelle Zahlen sind. Solche Matrizen sind ein zentrales Studienobjekt der Linearen Algebra.

- (2) Seien $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $M_i := \{1, \dots, m_i\}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Eine Familie mit Indexmenge $M_1 \times \dots \times M_n$ kannst du dir als „ n -dimensionale Matrix“ vorstellen. In der Informatik werden solche Objekte „ n -dimensionale arrays“ genannt. In Physik und multilinearer Algebra werden sie zur Koordinatendarstellung von *Tensoren* verwendet.

§3.6.12 **Bemerkung (Potenz als Produkt mit sich selbst).** Seien I, M zwei Mengen und $(M)_{i \in I}$ die „konstante Familie“, die an jedem Eintrag die Menge M stehen hat. Dann ist $\prod_{i \in I} M$ schlicht die Menge M^I aus **Definition** §3.5.5. Ebenso gilt für jede natürliche Zahl n :

$$M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}}$$

sodass beispielsweise $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Also ist M^I eine Art „ I -faches Produkt von M mit sich selbst“, genauso wie für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die Potenz m^n das n -fache Produkt von m mit sich selbst ist:

$$m^n := \underbrace{m \cdot \dots \cdot m}_{n\text{-mal}}$$

Aus diesem Grund wird M^I die „ I -te Potenz von M “ genannt.

§3.6.13 **Vorschau (*Auswahlaxiom).** Sind M, N zwei nichtleere Mengen, etwa mit Elementen $x \in M$ und $y \in N$, so ist auch das kartesische Produkt $M \times N$ nichtleer, weil $(x, y) \in M \times N$. Ist dagegen $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie unendlich vieler nichtleerer Mengen, so ist es, sofern keine weiteren Informationen über die Mengen M_i bekannt sind, unmöglich, zu zeigen, dass auch das Produkt $\prod_{i \in I} M_i$ nichtleer ist.

Sei zum Beispiel $I := \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von \mathbb{R} . Du kannst ja mal versuchen, ein konkretes Element von $\prod_{M \in I} M$ hinzuschreiben, was darauf hinausläuft, irgendwie aus jeder nichtleeren Teilmenge von \mathbb{R} ein Element „auszuwählen“.

Einige (nichtkonstruktive) Sätze der modernen Mathematik sind nun allerdings darauf angewiesen, dass Produkte beliebig vieler nichtleerer Mengen stets nichtleer sind. Daher bildet genau diese Aussage ein eigenes Axiom, das sogenannte **Auswahlaxiom**.

Dabei handelt es sich um ein *nichtkonstruktives* Axiom: es behauptet die Existenz eines Elements, ohne eine Anleitung für dessen Konstruktion an die Hand zu geben.¹⁷ Mathematische Objekte, deren Existenz zwar abstrakt bewiesen werden kann, die sich aber nicht konkret beschreiben oder konstruieren lassen, werden im Englischen *intangibles* genannt. Beispielsweise handelt es sich bei den Elementen von $\prod_{M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}} M$ um *intangibles*.

¹⁷In der „konstruktiven Mathematik“ (vgl. **Vorschau** §2.8.7) wird das Auswahlaxiom daher nicht akzeptiert. Im mathematischen Mainstream, dem auch die Vorlesungen folgen, wird es dagegen bedenkenlos eingesetzt.

* Disjunkte Vereinigung

§3.6.14 **Definition (Disjunktheit).** Zwei Mengen M, N heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, also wenn $M \cap N = \emptyset$.

Eine Familie von Mengen $(M_i)_{i \in I}$ heißt **paarweise disjunkt**, wenn je zwei der M_i 's disjunkt sind, d.h. wenn gilt:

$$M_i \cap M_j \neq \emptyset \quad \rightarrow \quad i = j \quad \text{für alle } i, j \in I$$

Sind M, N zwei disjunkte Mengen, so wird deren Vereinigung auch eine **disjunkte Vereinigung** genannt und mit

$$M \dot{\cup} N := M \cup N \quad (\text{sofern } M, N \text{ disjunkt sind})$$

notiert. Beachte, dass „ $\dot{\cup}$ “, anders als es der Vergleich mit **Bemerkung** §1.2.9 vielleicht nahelegt, keine neue Mengenoperation darstellt, sondern schlicht die Vereinigung aus **Definition** §3.6.1.¹⁸ Der Punkt dient lediglich zur Mitteilung darüber, dass die beiden Mengen, von deren Vereinigung die Rede ist, disjunkt sind.

Ebenso wird die Vereinigung einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ paarweiser disjunkter Mengen deren *disjunkte Vereinigung* genannt. Man schreibt:

$$\dot{\bigcup}_{i \in I} M_i := \bigcup_{i \in I} M_i \quad (\text{sofern die } M_i \text{'s paarweise disjunkt sind})$$

Für ein System \mathcal{M} paarweise disjunkter Mengen schreibt man:

$$\dot{\bigcup} \mathcal{M} := \bigcup \mathcal{M} \quad (\text{sofern die Elemente von } \mathcal{M} \text{ paarweise disjunkte Mengen sind})$$

§3.6.15 **Beispiel.**

- (1) Die Mengen {Spieler der TSG Hoffenheim} und {Spieler des FSV Mainz 05} sind disjunkt, weil kein Spieler zugleich bei beiden Vereinen verpflichtet ist.
- (2) Die Mengen {Informatikstudenten} und {Mathestudenten} sind nicht disjunkt, weil manche Leute auch beide Fächer zugleich studieren.
- (3) Es ist

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3, 4, 5\} &= \{1, 3, 4\} \dot{\cup} \{2, 5\} \\ \mathbb{Z} &= \mathbb{N}_0 \dot{\cup} \mathbb{Z}_{<0} \end{aligned}$$

§3.6.16 **Bemerkung.** Die Vereinigung einer paarweise disjunkten Mengenfamilie kannst du dir als eine Art „Addition“ vorstellen. Beispielsweise lässt sich zeigen: sind $m, n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit m -vielen Elementen, N eine zu M disjunkte Menge mit n -vielen Elementen, so enthält die disjunkte Vereinigung $M \dot{\cup} N$ genau $(m + n)$ -viele Elemente.

Für nicht-disjunkte Vereinigungen gilt das aber nicht. Beispielsweise ist

$$\{1, 3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

¹⁸Die mengentheoretische „Realisierung“ des Entweder-Oder $\dot{\cup}$ ist die *symmetrische Differenz*:

$$M \Delta N := (M \setminus N) \dot{\cup} (N \setminus M)$$

d.h. in diesem Beispiel enthält die Vereinigung einer dreielementigen Menge mit einer zweielementigen Menge nur vier Elemente.

Aber auch nicht-disjunkte Mengen können aufeinander „addiert“ werden mithilfe des folgenden Tricks: Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine beliebige (nicht notwendig paarweise disjunkte) Mengenfamilie, so können die M_i 's „künstlich disjunkt gemacht“ werden durch Übergang zu den Mengen

$$\{i\} \times M_i = \{(i, x) \mid x \in M_i\} \quad i \in I$$

Die Elemente von $\{i\} \times M_i$ kannst du dir vorstellen als „Klone“ der Elemente von M_i , welche mit einem „Marker“ versehen wurden, der ihre Zugehörigkeit zu M_i kennzeichnet und sie von den Elementen von $\{j\} \times M_j$ für $j \in I \setminus \{i\}$ unterscheidet. Die Mengenfamilie $(\{i\} \times M_i)_{i \in I}$ ist nun paarweise disjunkt.

§3.6.17 **Definition (Disjunkte Vereinigung).** Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Die Menge

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times M_i) = \{(i, x) \mid i \in I, x \in M_i\}$$

heißt die (äußere) **disjunkte Vereinigung** der M_i 's.

Ist die Indexmenge I von der Gestalt $I = \{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man

$$M_1 \sqcup \dots \sqcup M_n := \bigsqcup_{i=1}^n M_i := \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i$$

Insbesondere ist für Mengen M, N :

$$M \sqcup N = \{(i, x) \mid i = 1 \text{ und } x \in M \text{ oder } i = 2 \text{ und } x \in N\}$$

Man spricht von der *disjunkten Vereinigung* von M und N .

§3.6.18 **Beispiel.** Es ist

$$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) \dots\}$$

d.h. die Menge $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$ besteht aus zwei „Kopien“ von \mathbb{N} . Für jede natürliche Zahl n enthält sie jeweils zwei „Klone“ von n , realisiert als $(1, n)$ und $(2, n)$.

§3.6.19 **Bemerkung (Produkt als Summe mit sich selbst).** Seien I, M zwei Mengen und $(M)_{i \in I}$ die „konstante Familie“, die an jedem Eintrag die Menge M stehen hat. Dann ist $\bigsqcup_{i \in I} M_i$ genau das kartesische Produkt $I \times M$. Ebenso gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\{1, \dots, n\} \times M = \underbrace{M \sqcup \dots \sqcup M}_{n\text{-mal}}$$

Also ist $I \times M$ die „ I -fache Summe von M mit sich selbst“, genauso wie für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ das Produkt $n \cdot m$ die n -fache Summe von m mit sich selbst ist:

$$n \cdot m := \underbrace{m + \dots + m}_{n\text{-mal}}$$

§3.6.20 **Vorschau.** Der Ausdruck „disjunkte Vereinigung“ ist nun mehrdeutig:

- (1) Zum einen bezeichnet er die disjunkte Vereinigung aus [Definition §3.6.17](#), also die Konstruktion, mit der Mengen zuerst „künstlich disjunkt“ gemacht und daraufhin „addiert“ werden. Ich habe dafür folgende Notation verwendet:

$$M \sqcup N \quad \text{bzw.} \quad \bigsqcup_{i \in I} M_i$$

- (2) Zum anderen bezeichnet er die gewöhnliche Vereinigung einer Familie paarweiser disjunkter Mengen aus [Definition §3.6.14](#), was ich notiert habe mit

$$M \dot{\cup} N \quad \text{bzw.} \quad \dot{\bigcup}_{i \in I} M_i$$

Hinzu kommt, dass in der Literatur beide Notationen durcheinander verwendet werden, d.h. sowohl die Objekte (1) als auch die Objekte (2) werden mal mit „ $\dot{\cup}$ “, mal mit „ \sqcup “ bezeichnet.

Tatsächlich ist es in den meisten Fällen gar nicht wichtig, wie genau die disjunkte Vereinigung „ $M \sqcup N$ “ definiert ist, d.h. wie genau man die Mengen M, N künstlich disjunkt gemacht hat. Die disjunkte Vereinigung bezieht ihre Signifikanz aus der kategorientheoretischen Eigenschaft, ein *Koprodukt* zu sein. In dieser Hinsicht ist sie ein genaues Gegenstück zum kartesischen Produkt. Mehr darüber wirst du in Vorlesungen und Büchern über Kategorientheorie lernen.

§3.7 Aufgabenvorschläge

§3.7.1 **Aufgabe (Kennenlernen).** Es sei T die Menge aller Leute, die sich gerade in diesem Tutorium befinden. Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche Mengen sind disjunkt oder gleich?

$$\begin{array}{ll}
 S := \{x \in T \mid x \text{ ist sportlich}\} & \emptyset \\
 N := \{x \in T \mid x \text{ geht gern in die Natur}\} & T \\
 W := \{x \in T \mid x \text{ kennt sich auf einem Spezialgebiet richtig gut aus}\} & N \setminus S \\
 M := \{x \in T \mid x \text{ spielt ein Musikinstrument}\} & W \cup S
 \end{array}$$

§3.7.2 **Aufgabe (Mengen vs. Familien (L)).** Es sei $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und es sei $a = (a_i)_{i \in I}$ diejenige Familie mit $a_i = i + 2$ für jedes $i \in I$. Welche der folgenden Objekte sind einander gleich und welche sind voneinander verschieden?

$$\begin{array}{ccccc}
 I & (a_i)_{i \in I} & \{a_i \mid i \in I\} & (4, 3, 5, 6, 7) & (2, 1, 3, 4, 5, 5) \\
 a & \{1, 2, 3, 4, 5\} & (3, 4, 5, 6, 7) & \{4, 3, 5, 6, 7\} & \{2, 1, 3, 4, 5, 5\}
 \end{array}$$

§3.7.3 **Aufgabe (Elemente und Teilmengen (L)).** Beurteilt für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbb{N} \in \mathbb{N} & \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} & \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\
 \mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} & \mathbb{N} \subseteq \{\mathbb{N}\} & \{\mathbb{N}\} \in \{\mathbb{N}\} & \{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{N}\} \\
 \{\mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \{\mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\
 \emptyset \in \emptyset & \emptyset \subseteq \emptyset & \emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset) & \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset)
 \end{array}$$

§3.7.4 **Aufgabe (Rechenregeln für Mengen).** Sucht euch drei Formeln aus der Formelsammlung in Anhang C.3, Anhang C.4 und Anhang C.5 raus, illustriert sie jeweils an einem Beispiel und begründet ihre Allgemeingültigkeit.

§3.7.5 **Aufgabe (Tupel als strings).** Wir betrachten die Mengen $T := \{\text{Dr.}\}$, $A := \{\text{Herr, Frau}\}$, $V := \{\text{Anne, John}\}$ und $N := \{\text{Hathaway, Sinclair, Wayne}\}$. Listet die Elemente der folgenden Mengen auf:

- $A \times N$
- $A \times T \times V \times N$
- $(T \cup V) \times N$
- $(T \times N) \cup (V \times N)$

Kapitel 4

Abbildungen

Der Begriff der Abbildung verallgemeinert den Funktionenbegriff aus der Schule. In diesem Vortrag werden grundlegende Begriffe, Sprech- und Schreibweisen im Umfeld von Abbildungen besprochen und mit Beispielen illustriert.

§4.1 Grundlegendes

Ich werde das Kapitel sogleich mit einer Definition und einigen Allgemeinheiten beginnen. Falls dir das zu abstrakt anmutet, wirf schonmal einen Blick auf die Liste in [Beispiel §4.1.5](#).

§4.1.1 **Definition (Abbildung)**. Seien X, Y zwei Mengen. Eine **Abbildung von X nach Y** (oder auch **Y -wertige Funktion auf X^1**) ist ein mathematisches Objekt, das *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y zuordnet.

Sind f eine Abbildung von X nach Y und $x \in X$, so heißt das eindeutig bestimmte Element von Y , das f dem Element x zuordnet, der **Funktionswert von f an der Stelle x** oder auch das **Bild von x unter der Abbildung f** und wird notiert mit

$$f(x) \qquad \text{(lies: „}f \text{ von }x\text{“)}$$

Ferner heißen

- X der **Definitionsbereich** (oder auch die **Quelle**) von f (englisch: “domain” oder “source”),
- Y der **Wertebereich** (oder auch das **Ziel**) von f (englisch: “codomain” oder “target”),
- die Menge $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ der **Graph** von f .

§4.1.2 **Axiom (Gleichheit von Abbildungen)**. Seien X, Y zwei Mengen. Zwei Abbildungen f, g von X nach Y stimmen genau dann überein, wenn sie an jeder Stelle denselben Funktionswert haben. Als Formel:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : f(x) = g(x)$$

Dementsprechend sind f und g voneinander verschieden, wenn es mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) \neq g(x)$.

Zwei Abbildungen, die sich in ihrem Definitionsbereich oder ihrem Wertebereich unterscheiden, denkt man sich als „Objekte verschiedenen Typs“. Sie seien von vornherein voneinander verschieden.

§4.1.3 **Notation**. Seien X, Y zwei Mengen. Anstelle von „ f ist eine Abbildung von X nach Y “ schreiben wir kurz und bündig:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{oder auch} \quad X \xrightarrow{f} Y \qquad \text{(lies: „}f \text{ von }X \text{ nach }Y\text{“)}$$

¹Manche Leute bevorzugen das Wort „Abbildung“ im Umfeld abstrakter Mengen und das Wort „Funktion“ im Umfeld von \mathbb{R} oder Vektorbündeln. Ich werde aber beide Wörter völlig synonym verwenden.

Definitionsbereich, Wertebereich und Graph einer Abbildung f werden manchmal notiert mit

$$\text{dom}(f), \quad \text{codom}(f) \quad \text{und} \quad \text{graph}(f)$$

Die Menge aller Abbildungen von X nach Y wird mit $\text{Abb}(X, Y)$ notiert:

$$\text{Abb}(X, Y) := \{f \mid f \text{ ist eine Abbildung von } X \text{ nach } Y\}$$

§4.1.4 **Notation** (*Eine Abbildung über eine Zuordnungsvorschrift definieren*). Sei $t(a)$ ein Term in der Variablen a . Sind X, Y zwei Mengen dergestalt, dass, setzt man für die Variable a ein beliebiges Element aus X ein, der Term t stets ein Element von Y ergibt, so heißt der Ausdruck

$$X \rightarrow Y, \quad x \mapsto t(x) \quad (\text{lies: „von } X \text{ nach } Y, x \text{ geht auf } t(x)\text{“})$$

eine **Zuordnungsvorschrift** oder auch **Abbildungsvorschrift** von X nach Y . Sie ist zu interpretieren als „Zuordnung“, die jedem Element $x \in X$ das Element $t(x) \in Y$, das durch Einsetzen des Objekts x anstelle der Variablen a zustandekommt, „zuordnet“.

Jede solche Zuordnungsvorschrift definiert eine Abbildung $X \rightarrow Y$, deren Funktionswerte an Elementen $x \in X$ genau mit den Elementen $t(x)$ übereinstimmt. Möchte man diese Abbildung mit einer Variable bezeichnen, so schreibt man:

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto t(x) \quad (\text{lies: „} f \text{ von } X \text{ nach } Y, x \text{ geht auf } t(x)\text{“})$$

Mit dieser Notation wird festgelegt, dass das Zeichen „ f “ fortan diejenige Abbildung $X \rightarrow Y$ bezeichnen soll, die durch die Zuordnung $x \mapsto t(x)$ gegeben ist. Für jedes $x \in X$ gilt also $f(x) = t(x)$. Nach **Axiom** §4.1.2 ist f durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Der Term t fungiert hier als sogenannter **Funktionsterm**.² Im Ausdruck „ $x \mapsto t(x)$ “ ist das Zeichen „ x “ eine gebundene Variable im Sinne von **Notation** §1.1.17.

§4.1.5 Beispiel.

- (1) Reelle Polynome ergeben Zuordnungen reeller Zahlen, die in der Schulmathematik auch „ganzrationale Funktionen“ genannt werden. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1 \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$

Deren Definitions- und Wertebereich sind hier jeweils die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Die Funktion g ordnet jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $3x^2 - 2x + 4$ zu, beispielsweise ist $g(4) = 3 \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 4 = 44$.

- (2) Seien cat die Menge aller Katzen und colour die Menge aller Farben. Wir haben eine Abbildung

$$f : \text{cat} \rightarrow \text{colour}, \quad C \mapsto (\text{Die Fellfarbe von } C)$$

deren Definitionsbereich genau cat und deren Wertebereich genau colour ist. Für eine Katze C ist $f(C)$ genau die Fellfarbe von C .

²Im für die Informatik relevanten *Lambda-Kalkül* sagt man: „Die Variable x wird durch λ -Abstraktion gebunden“, und schreibt „ $\lambda x.t(x)$ “ anstelle von $x \mapsto t(x)$.

(3) Sei X eine beliebige Menge. Die Abbildung

$$\{-\} : X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$$

hat als Definitionsbereich X , als Wertebereich die Potenzmenge von X und sie ordnet jedem Element $x \in X$ diejenige Einermenge zu, die nur aus x besteht.

Der senkrechte Strich im Ausdruck „ $\{-\}$ “ ist eine suggestive Schreibweise, die kommunizieren soll, dass sich der Funktionswert von x genau durch Einsetzen an der mit dem Strich markierten Stelle ergibt.

(4) Sei $\mathcal{A} := \{A \mid A \text{ ist eine Aussage}\}$ die Menge aller mathematischen Aussagen. Die Junktoren \wedge und \neg ergeben Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) \mapsto A \wedge B & A \mapsto \neg A \end{array}$$

d.h. im ersten Fall wird jedem Aussagenpaar (A, B) die Konjunktion „ A und B “ zugeordnet und im zweiten Fall jeder Aussage ihre Negation. Ebenso liefern auch die anderen Junktoren $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ jeweils Abbildungen $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

(5) Es bezeichne Set die Gesamtheit aller Mengen. Dann haben wir eine Abbildung

$$\text{Abb}(-, -) : \text{Set} \times \text{Set} \rightarrow \text{Set}, (X, Y) \mapsto \text{Abb}(X, Y)$$

die jedem Mengenpaar (X, Y) die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ aller Abbildungen $X \rightarrow Y$ zuordnet.

Aus der Schule bist du es vielleicht gewohnt, dass der Graph einer Funktion eine Art „Kurve“ ist. Beachte, dass unsere allgemeine Graphendefinition deutlich abstrakter ist und der Graph einer Abbildung in der Regel keine „geometrische“ Bedeutung besitzt. Zumindest im Fall einer Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , im Allgemeinen kann er jedoch alles andere als „kurvig“ aussehen.

§4.1.6 **Vorschau** (**mengentheoretische Abbildungsdefinition*). Die obige Definition einer Abbildung ist, ebenso wie die Mengendefinition [Definition §3.1.1](#), rein axiomatisch. In der im 20. Jahrhundert vorherrschenden Praxis kann der Abbildungsbegriff formal präzise auf dem Mengen- und Elementbegriff aufgebaut werden: Eine Analyse ergibt, dass für zwei Abbildungen f, g äquivalent sind:

(i) $f = g$.

(ii) $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$, $\text{codom}(f) = \text{codom}(g)$ und $\text{graph}(f) = \text{graph}(g)$.

Definiert man nun eine Abbildung f als ein Tripel (X, G, Y) bestehend aus drei Mengen X, G, Y , wobei G eine Teilmenge von $X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in G$ gibt, sein soll, und definiert man $f(x) :=$ (das eindeutige $y \in Y$ mit $(x, y) \in G$) für $x \in X$, so wird die Äquivalenz (i) \leftrightarrow (ii) zu einer beweisbaren Aussage. Dagegen wurde sie vermittels [Axiom §4.1.2](#) einfach per Axiom festgelegt.

In der [Topostheorie](#) wird umgekehrt verfahren: hier sind die „Abbildungen“ das fundamentale Konzept, das nicht definiert und nur durch Axiome beschrieben wird, worauf dann formal präzise die Begriffe von Element und Teilmenge aufgebaut werden.

Weil ich keiner Herangehensweise den Vorzug geben will, werde ich es bei [Definition §4.1.1](#) belassen und nicht weiter auf eine formale Abbildungsdefinition eingehen.

§4.1.7 **Bemerkung** (*Beweisen, dass zwei Abbildungen gleich oder ungleich sind*). Seien X, Y zwei Mengen und $f, g : X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen. Da das Gleichheitskriterium aus **Axiom** §4.1.2 eine Allaussage ist (für jedes $x \in X$ ist $f(x) = g(x)$), kann die Gleichheit $f = g$ nach **Axiom** §2.5.8 dadurch bewiesen werden, dass ein „beliebiges“ Element von X fixiert wird und dann bewiesen wird, dass dessen Funktionswerte unter f und g übereinstimmen.

Bevor du überhaupt versuchst, die Gleichheit zweier Abbildungen zu beweisen, solltest du dich natürlich erstmal vergewissern, dass sie überhaupt denselben Definitionsbereich und denselben Wertebereich haben. Meistens ist das aber „offensichtlich“ und muss im Beweis nicht nochmal erwähnt werden.

Um hingegen zu zeigen, dass die Abbildungen f, g verschieden sind, genügt es nach **Satz** §2.6.5, ein Gegenbeispiel anzugeben, d.h. in diesem Fall, ein Element $x \in X$ zu finden, für das $f(x) \neq g(x)$.

§4.1.8 **Beispiel.**

(1) Betrachten wir die Abbildungen:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

so ist $f \neq g$, denn es ist $f(1) = 1$ und $g(1) = 3$.

(2) Betrachten wir dagegen die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1) \cdot (x - 1) \\ \beta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

so gilt für jede beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = \beta(x)$$

Demnach ist $\alpha = \beta$.

§4.1.9 **Bemerkung** (*Zuordnungsvorschriften vs. Abbildungen*). Jede Zuordnungsvorschrift kann zur Definition einer Abbildung verwendet werden. Beachte, dass Zuordnungsvorschriften und Abbildungen nicht ganz dasselbe sind. Eine Zuordnungsvorschrift ist ein sprachliches Gebilde, eine konkrete Vorschrift, wie Gegenständen vom Typ X Gegenstände vom Typ Y zuzuordnen seien, wohingegen der Abbildungsbegriff eine mathematische Abstraktion darstellt. Das Verhältnis zwischen Termen und Abbildungen ist, genau wie das zwischen Eigenschaften und Mengen (vgl. **Vorschau** §1.3.6), ein Aspekt der Dualität zwischen Syntax und Semantik (siehe **Bemerkung** §5.1.18).

- Dieselbe Abbildung kann durch verschiedene Zuordnungsvorschriften zustandekommen. Beispielsweise sind

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1 \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

zwei verschiedene Zuordnungsvorschriften, die aber nach **Beispiel** §4.1.8 dieselbe Abbildung induzieren.

- Nicht jede Abbildung muss durch eine einfache Zuordnungsvorschrift definierbar sein. Abbildungsvorschriften können beliebig kompliziert sein und manche Abbildungen sind so chaotisch, dass sie gar keiner Abbildungsvorschrift gehorchen. Beispielsweise beweist man in der Berechenbarkeitstheorie, dass es Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ (also Abfolgen von Nullen und Einsen) geben muss, die nicht Turing-berechenbar³ sind, d.h. für die es keinen konventionellen Algorithmus gibt, der nacheinander alle Folgenglieder auflistet.
- Definitions- und Wertebereich sind grundlegende Bestandteile einer Abbildung. Beispielsweise kann der Ausdruck

$$x \mapsto x^2$$

in verschiedenfacher Weise als Zuordnungsvorschrift interpretiert werden, z.B. als Zuordnung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Die drei Abbildungen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^2$$

sind aber allesamt voneinander verschieden, da sie verschiedene Definitions- und Wertebereiche haben. Siehe auch **Beispiel** §4.6.9.

§4.1.10 **Bemerkung** („Funktionen in mehreren Veränderlichen“). Nach unserer Abbildungsdefinition kann in eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ genau ein Element x aus X „eingesetzt“ werden, um genau ein Element $f(x)$ von Y zu erhalten. Dies erweckt vielleicht den Anschein, dass unsere Abbildungsdefinition nicht in der Lage wäre, „Funktionen in mehreren Veränderlichen“ wie zum Beispiel

$$x, y \mapsto 2xy + xy^2$$

zu modellieren. – Sie ist es aber, und der Trick besteht in der Verwendung des kartesischen Produkts als Definitionsbereich. Beispielsweise haben wir eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2xy + xy^2$$

Abbildungen dieser Art sind das Hauptthema von Kapitel 6. Verwenden wir noch allgemeinere Produkte $\prod_{i \in I} M_i$ als Definitionsbereich, können wir auch „Funktionen in unendlich vielen Variablen“ definieren.

§4.2 Verkettungen von Abbildungen

§4.2.1 **Definition** (*Verkettungen von Abbildungen*). Seien X, Y, Z drei Mengen und $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z$ zwei Abbildungen. Mit

$$g \circ f \quad (\text{lies: „g nach f“, „g verkettet f“ oder „g kringel f“})$$

wird diejenige Abbildung $X \rightarrow Z$ bezeichnet, die gegeben ist durch die Zuordnungsvorschrift

$$X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$$

³Alan Turing (1912-1954)

Die Abbildung $g \circ f$ heißt die **Verkettung**, **Komposition** oder **Hintereinanderausführung** von f und g .

Insgesamt erhalten wir eine Abbildung, die ein Paar von Abbildungen auf eine Abbildung abbildet:

$$\circ : \text{Abb}(Y, Z) \times \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(X, Z), (g, f) \mapsto g \circ f$$

§4.2.2 Bemerkung

- Sind zwei Abbildungen durch Funktionsterme gegeben, so erhält man ihre Verkettung durch Einsetzen des einen Terms in den anderen im Sinne von [Definition §1.1.13](#), siehe dazu die nachfolgenden Beispiele. Dies ist ein Aspekt der Dualität zwischen Syntax und Semantik (siehe [Bemerkung §5.1.18](#)).
- Beachte, dass im Term „ $g \circ f$ “ diejenige Abbildung, die „zuerst“ ausgeführt wird, an rechter Stelle steht. Für ein Element $x \in X$ berechnet man $(g \circ f)(x)$, indem man zuerst $f(x)$ ausrechnet und darauf nun die Abbildung g anwendet.

§4.2.3 Beispiel

- (1) Es seien $S := \{\text{Schauspieler in Filmen}\}$ die Menge aller Filmdarsteller und $F := \{\text{Filme}\}$ die Menge aller Filme. Wir haben Abbildungen

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow F, s \mapsto (\text{Der erste Film, in dem } s \text{ mitspielte}) \\ g : F &\rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto (\text{Das Jahr, in dem die Dreharbeiten an } x \text{ begannen}) \end{aligned}$$

Dann ist die Verkettung $g \circ f$ diejenige Abbildung $S \rightarrow \mathbb{N}$, die jedem Schauspieler das Jahr zuordnet, in dem der erste Film, bei dem er mitgespielt hat, gedreht wurde.

- (2) Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:⁴

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 \end{aligned}$$

Wegen $(g \circ f)(4) \neq (f \circ g)(4)$ ist $g \circ f \neq f \circ g$.

- (3) Die Technik, einer Abbildung g eine Abbildung f „vorzuschalten“, kennst du vielleicht schon aus der Schule als „Variablensubstitution“, vgl. [Beispiel §1.1.14](#). Bei der *Integration durch Substitution* spielt dies eine maßgebliche Rolle. Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei hinreichend „glatte“ Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$, so besagt die Substitutionsregel, dass

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g = \int_a^b (g \circ f) \cdot f'$$

⁴vgl. [Beispiel §1.1.14](#)

§4.2.4 **Satz** (*Verkettung von Abbildungen ist assoziativ*). Seien A, B, C, D vier beliebige Mengen und

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

drei Abbildungen. Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

§4.2.5 **Beweis**. Für jedes $a \in A$ ist

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(a) \end{aligned}$$

Da das Element $a \in A$ beliebig gewählt war, folgt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. ■

§4.2.6 **Bemerkung** (*Klammern sparen*). Aufgrund von **Satz** §4.2.4 wird in dessen Situation einfach

$$h \circ g \circ f$$

geschrieben, da es egal ist, ob erst g mit f verkettet wird und dann h mit $g \circ f$ – oder ob erst h mit g verkettet wird und dann $h \circ g$ mit f . Mit fortgeschrittenen Techniken lässt sich zeigen, dass es auch bei Verkettungen von mehr als drei Abbildungen egal ist, wie man Klammern setzt. Daher werden Klammerungen meist ganz weggelassen.⁵ Sind etwa A, B, C, D, E, F sechs Mengen und sind Abbildungen

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F$$

gegeben, so wird mit

$$e \circ d \circ c \circ b \circ a$$

diejenige Abbildung notiert, die durch Verkettung dieser fünf Abbildungen entsteht, die sich also dadurch zusammensetzt, dass erst a durchlaufen wird, dann b , dann c , dann d und zuletzt e .

§4.3 Identität und Inklusion

Sei X eine beliebige Menge. Gibt es überhaupt eine Abbildung $X \rightarrow X$? Solange wir keine Informationen über die Elemente von X haben, können wir ja schwerlich eine besondere Abbildungsvorschrift angeben. Dennoch gibt es stets eine Abbildung $X \rightarrow X$, deren Zuordnungsvorschrift so simpel ist, dass man sie schon wieder übersehen könnte:

§4.3.1 **Definition** (*Identitätsabbildung*). Sei X eine Menge. Die Abbildung

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$$

heißt die **Identität auf X** .

⁵vgl. dazu auch **Bemerkung** §6.2.5

§4.3.2 **Bemerkung.** Die Identität auf der Menge X bildet jedes Element auf sich selbst ab und „tut gar nichts“. Die Identität auf \mathbb{R} kennst du bereits aus der Schule: die Polynomfunktion „ $f(x) = x$ “ ist genau die Identitätsabbildung $\text{id}_{\mathbb{R}}$ auf der Menge der reellen Zahlen.

Der nächste Satz zeigt, dass sich die Identität hinsichtlich der Verkettung von Abbildungen verhält, wie die 0 bei der Addition oder die 1 bei der Multiplikation, vgl. [Definition §6.3.1](#).

§4.3.3 **Satz (Neutralität der Identität).** Seien X, Y zwei beliebige Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\text{id}_Y \circ f = f \quad \text{und} \quad f \circ \text{id}_X = f$$

§4.3.4 **Beweis.** Für ein beliebiges Element $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} (\text{id}_Y \circ f)(x) &= \text{id}_Y(f(x)) \\ &= f(x) && \text{(per Definition von } \text{id}_Y \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ \text{id}_X)(x) &= f(\text{id}_X(x)) \\ &= f(x) && \text{(per Definition von } \text{id}_X \text{)} \end{aligned}$$

Da das Element $x \in X$ beliebig gewählt war, folgt $\text{id}_Y \circ f = f$ und $f \circ \text{id}_X = f$. ■

§4.3.5 **Vorschau (*Die Kategorie der Mengen).** [Satz §4.3.3](#) und [Satz §4.2.4](#) lassen sich zusammenfassen in der Aussage, dass Mengen und Abbildungen die Struktur einer [Kategorie](#) bilden. Die Sprache der Kategorien ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Mathematik und du wirst, falls du in die reine Mathematik gehst, in deinem Studium noch haufenweise weitere Kategorien kennenlernen. Zum Beispiel:

Fachgebiet	Kürzel	Kategorie
Grundlagen	Set	Mengen
	Pos	Geordnete Mengen
Lineare Algebra	K Vec	K -Vektorräume
	R Mod	R -Moduln
	R Mat	Matrizen über R
Analysis	Top	Topologische Räume
	Met	Metrische Räume
	Man	Mannigfaltigkeiten
	σ -Alg	Sigma-Algebren
Algebra	Mon	Monoide
	Grp	Gruppen
	G Set	G -Mengen
	Ring	Ringe
	R Alg	R -Algebren
	Funktionalanalysis	Unif
Ban		Banachräume
Hilb		Hilberträume
Fortgeschrittene Vorlesungen	Cat	Kategorien

Sh(\mathcal{C})	Garben auf \mathcal{C}
sSet	Simpliziale Mengen
Ch(\mathcal{A})	Komplexe in \mathcal{A}
Sch	Schemata

§4.3.6 **Definition (Inklusionsabbildung)**. Seien X eine Menge und $U \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **Inklusionsabbildung** (oder auch kurz: **Inklusion**) von U in X ist die Abbildung

$$U \rightarrow X, x \mapsto x$$

Sie wird bevorzugt mit dem griechischen Buchstaben ι (iota) und einem Pfeil mit Haken „ \hookrightarrow “ notiert:

$$\iota_U : U \hookrightarrow X$$

Gelegentlich spricht man auch von der *natürlichen Inklusion* oder der *kanonischen Inklusion*.

§4.3.7 **Bemerkung**. Die natürliche Inklusion ordnet einem Element aus U genau das gleiche Element in X zu. Wie bei der Identitätsabbildung werden auch von der Inklusion keine Elemente verändert. Trotz ihres trivialen Abbildungsverhaltens erweist sich die Inklusionsabbildung für einige theoretische Überlegungen als nützlich, siehe z.B. **Beispiel** §4.5.2 und **Bemerkung** §5.1.14.

Der „behakte Pfeil \hookrightarrow “ ist schlicht eine Variante zum gewöhnlichen Abbildungspfeil, die bei Abbildungen, die sich ähnlich wie die natürliche Inklusion verhalten, verwendet wird, um ihren „Inklusionscharakter“ zu betonen.

§4.3.8 **Beispiel**. Wegen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ hat man eine Inklusionsabbildung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Ein Pendant in der Informatik stellt die Typumwandlung eines *integers* zu einem *float* dar. Der Vergleich hinkt jedoch, insofern Typumwandlungen, im Gegensatz zu Inklusionsabbildungen, nicht immer ohne Informationsverlust vonstatten gehen.

§4.3.9 **Definition (* Leere Abbildung)**. Sei X eine beliebige Menge. Dann gibt es genau eine Abbildung $\emptyset \rightarrow X$, die sogenannte **leere Abbildung**. Es handelt sich genau um die natürliche Inklusion der leeren Teilmenge $\emptyset \subseteq X$.⁶

§4.4 Bilder und Urbilder von Teilmengen

§4.4.1 **Definition (Transfer von Teilmengen)**. Seien X, Y Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung.

- Die Menge

$$\text{im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$$

heißt das **Bild von f** (englisch: “image”).

- Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists a \in A : f(a) = y\}$$

die **Bildmenge von A** oder schlicht das **Bild von A** unter f .

⁶vgl. **Satz** §3.3.7

- Für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

die **Urbildmenge von B** oder schlicht das **Urbild** von B unter f .

- Für ein Element $y \in Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

die **Faser von y** unter der Abbildung f . Man spricht auch vom **Urbild von y** . Die Elemente von $f^{-1}(y)$ werden ebenfalls **Urbilder von y** genannt.

§4.4.2 **Beispiel.** Für die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$$

gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned} \text{im}(f) &= \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\} & f^{-1}(9) &= \{-3, 3\} \\ f(\mathbb{Z}_{\leq 0}) &= f(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \text{im}(f) & f^{-1}(0) &= \{0\} \\ f(\{7\}) &= \{49\} & f^{-1}(-9) &= \emptyset \\ f(\{2, 6, -2, -5\}) &= \{4, 25, 36\} & f^{-1}(\{6, -1\}) &= \emptyset \\ f^{-1}(\text{im}(f)) &= \mathbb{Z} & f^{-1}(\{0, 9, 12\}) &= \{0, 3, -3\} \end{aligned}$$

§4.4.3 **Beispiel (*)**.

- (1) Für die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 - x - 1$$

wurde in **Beispiel §2.5.20** gezeigt, dass $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Tatsächlich ist diese Faser sogar einelementig, ihr Element, also die eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^5 - x - 1 = 0$, lässt sich aber nicht mit herkömmlichen arithmetischen Operationen hinschreiben, vgl. **Beispiel §1.3.21**.

- (2) In **Beispiel §2.4.8** wurde für die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \cdot (n + 1)$$

bewiesen, dass $\text{im}(f) \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$.

§4.4.4 **Definition (Konstante Abbildung).** Seien X, Y zwei Mengen. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt **konstant**, wenn $\text{im}(f)$ eine Einermenge ist, d.h. wenn es ein $y \in Y$ gibt derart, dass $f(x) = y$ für alle $x \in X$.

§4.4.5 **Beispiel.**

- (1) Zum Beispiel ist

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4$$

die konstante Abbildung, die alles auf 4 schickt. In der Analysis wird gezeigt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann konstant ist, wenn sie differenzierbar ist mit $f' = 0$.

- (2) Allgemein geben Terme, die von gar keinen Variablen abhängen (siehe **Beispiel §1.1.10**), Anlass zu konstanten Abbildungen.

§4.5 Einschränkung von Definitions- und Wertebereich

In diesem Abschnitt seien stets X, Y zwei Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

§4.5.1 **Definition** (*Einschränken des Definitionsbereichs*). Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X . Dann ist die **Einschränkung von f auf A** oder auch **Restriktion von f auf A** diejenige Abbildung $A \rightarrow Y$, die durch die Abbildungsvorschrift

$$A \rightarrow Y, a \mapsto f(a)$$

gegeben ist. Notation:

$$f|_A \quad (\text{lies: „}f \text{ eingeschränkt auf } A\text{“})$$

Die Abbildung $f|_A$ funktioniert also genau wie f , mit dem einzigen Unterschied, dass der Definitionsbereich verkleinert wurde und $f|_A$ nur noch den Elementen aus A etwas zuordnet. Insgesamt erhalten wir eine sogenannte *Restriktionsabbildung*:

$$\text{res} : \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(A, Y), f \mapsto f|_A$$

Beachte: Im Fall $A \subsetneq X$ sind f und $f|_A$ zwei verschiedene Abbildungen, da sie verschiedene Definitionsbereiche haben.

§4.5.2 **Beispiel**.

(1) Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Deren Einschränkung auf die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist dann gegeben durch

$$f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Obwohl die Zuordnungsvorschrift ($x \mapsto x^2$) dieselbe ist, handelt es sich um eine andere Funktion! Beispielsweise ist $7 \in \text{im}(f)$ wegen $f(\sqrt{7}) = 7$; dagegen ist $7 \notin \text{im}(f|_{\mathbb{Q}})$, denn es gibt keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$, für die $q^2 = 7$ gälte.

(2) Bezeichnet ι_A die Inklusion einer Teilmenge $A \subseteq X$, so gilt $f|_A = f \circ \iota_A$, d.h. die Restriktion ergibt sich durch Verkettung mit der Inklusionsabbildung $A \hookrightarrow X$. Insbesondere ist die Inklusionsabbildung selbst $\iota_A = \text{id}_X \circ \iota_A = \text{id}_X|_A$ genau die Einschränkung der Identitätsabbildung auf A .

§4.5.3 **Definition** (**Einschränkung und Fortsetzung*). Seien X, Y zwei Mengen, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $X \xrightarrow{F} Y, A \xrightarrow{f} Y$ zwei Abbildungen. F heißt eine **Fortsetzung** von f (und f eine **Einschränkung** von F), wenn $F|_A = f$.

§4.5.4 **Beispiel** (*).

(1) Die *komplexe Betragsfunktion*

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x + iy \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist eine Fortsetzung der reellen Betragsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$.

(2) In der Analysis wird die Sprache der „Reihen“ entwickelt und bewiesen, dass durch

$$\zeta : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Beispielsweise bewies Euler 1735, dass

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

und nach einem Satz von Apéry⁷ ist über die Zahl $\zeta(3)$ zumindest bekannt, dass sie irrational ist.

Die Abbildung ζ besitzt unendlich viele verschiedene Fortsetzungen auf die Obermenge $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, von denen die meisten aber völlig uninteressant sind. Allerdings wird in der Funktionentheorie gezeigt, dass ζ genau eine Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ besitzt, die *holomorph*, d.h. komplex differenzierbar, ist. Diese Fortsetzung wird ebenfalls mit dem Buchstaben „ ζ “ notiert und heißt die *Riemannsche Zeta-Funktion*. Beispielsweise ist $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. In der Unterhaltungsmathematik werden manchmal verblüffende „Beweise“ präsentiert für die Gleichung $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$.

§4.5.5 **Definition** (*Einschränken des Wertebereichs). Sei $B \subseteq Y$ eine Teilmenge mit $\text{im}(f) \subseteq B$. Dann ist die **Einschränkung von f auf B** diejenige Abbildung $X \rightarrow B$, die durch die Abbildungsvorschrift

$$X \rightarrow B, x \mapsto f(x)$$

gegeben ist. Notation:

$$f|_B \quad (\text{lies: „}f \text{ eingeschränkt auf } B\text{“})$$

Die Abbildung $f|_B$ funktioniert also genau wie f , mit dem einzigen Unterschied, dass der Wertebereich verkleinert wurde.

§4.5.6 **Beispiel** (*Auf- und Abrunden). Für $x \in \mathbb{R}$ gibt es zur Notation der nächstkleineren und nächstgrößeren ganzen Zahl die **Gauß-Klammern**:

$$\lfloor x \rfloor := (\text{Die nächstkleinere ganze Zahl}) \quad \lceil x \rceil := (\text{Die nächstgrößere ganze Zahl})$$

Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{23}{6} \right\rfloor &= \lfloor 3,8\bar{3} \rfloor = 3 & \lfloor \pi \rfloor &= 3 & \lfloor -\pi \rfloor &= -4 & \lfloor 3 \rfloor &= 3 \\ \left\lceil \frac{23}{6} \right\rceil &= \lceil 3,8\bar{3} \rceil = 4 & \lceil \pi \rceil &= 4 & \lceil -\pi \rceil &= -3 & \lceil 3 \rceil &= 3 \end{aligned}$$

Man erhält zwei Abbildungen $\mathbb{R} \xrightarrow[\lceil - \rceil]{\lfloor - \rfloor} \mathbb{R}$. Wegen $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lassen sich diese beiden Funktionen im Wertebereich auf \mathbb{Z} einschränken zu zwei Abbildungen

$$\lfloor - \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor \quad \lceil - \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil$$

der **Abrundungsfunktion** und der **Aufrundungsfunktion**. Sie besitzen folgende *universelle Eigenschaften*:

$$n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor \quad \text{und} \quad \lceil x \rceil \leq n \iff x \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

⁷Roger Apéry (1916-1994)

§4.5.7 **Bemerkung (*)**. Beachte, dass sich der Wertebereich einer Funktion f nur auf solche Teilmengen einschränken lässt, die $\text{im}(f)$ umfassen. Ist beispielsweise

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n - n^2$$

so ergäbe der Ausdruck „ $f|_{\mathbb{N}}$ “ keinen Sinn. Denn die Zuordnung $n \mapsto 2n - n^2$ definiert keine Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, weil beispielsweise $2 \cdot 5 - 5^2$ gar kein Element von \mathbb{N} wäre.

Beim Definitionsbereich besteht keine solche Anforderung. Er lässt sich auf beliebige Teilmengen einschränken.

§4.6 Injektiv, surjektiv, bijektiv

In diesem Abschnitt seien X, Y stets zwei Mengen.

§4.6.1 **Definition (Injektive Abbildung)**. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt **injektiv** (oder auch: eine **Injektion**), wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Für alle $a, b \in X$ gilt:

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

(ii) Für je zwei verschiedene Elemente $a, b \in X$ sind auch $f(a)$ und $f(b)$ voneinander verschieden.

(iii) Für jedes $y \in Y$ gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

§4.6.2 **Beweis**. (i)↔(ii): Es ist (ii) genau die Kontraposition von (i) und damit zu (i) äquivalent.

(i)→(iii): Es gelte (i) und es seien $a, b \in X$ mit $f(a) = y$ und $f(b) = y$. Wegen $f(a) = f(b)$ folgt aus (i), dass $a = b$. Also hat y höchstens ein Urbild.

(iii)→(i): Seien $a, b \in X$ mit $f(a) = f(b)$. Da das Element $y := f(a) \in Y$ nach (iii) höchstens ein Urbild hat, muss dann $a = b$ sein. ■

§4.6.3 **Beispiel**.

(1) Die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2 - 2n$$

ist nicht injektiv, denn es ist $f(0) = f(2)$.

(2) Für eine beliebige Menge X ist die Abbildung

$$X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$$

injektiv. Denn sind $x, y \in X$ mit $\{x\} = \{y\}$, so ist bereits $x = y$.

(3) Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ist die Inklusionsabbildung $U \hookrightarrow X$ injektiv.

§4.6.4 **Definition (Surjektive Abbildung)**. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt **surjektiv** (oder auch: eine **Surjektion**), wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (i) Für jedes $y \in Y$ gibt es mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
- (ii) Es gilt $\text{im}(f) = Y$, d.h. das Bild von f stimmt mit dem Wertebereich von f überein.

§4.6.5 **Beweis.** (i) \leftrightarrow (ii) ergibt sich direkt aus der Definition von $\text{im}(f)$, siehe [Definition §4.4.1](#). ■

§4.6.6 **Beispiel.**

- (1) Die Abbildung

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

ist surjektiv. Dies wurde in [Beispiel §2.5.9](#) bewiesen.

- (2) Die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n + 1$$

ist zwar injektiv, jedoch nicht surjektiv. Denn es gibt keine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die $n + 1 = 0$ gälte. Daher ist $0 \notin \text{im}(f)$ und f ist nicht surjektiv. Dedekind⁸ erhob dieses Phänomen sogar zur Definition von Unendlichkeit: Eine Menge X heißt *Dedekind-unendlich*, wenn es eine injektive Abbildung $X \rightarrow X$ gibt, die nicht surjektiv ist.

- (3) Die Abbildung

$$g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} n - 1 & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

hingegen ist surjektiv (aber nicht injektiv), denn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n = g(n + 1)$.

- (4) Es sei \mathbb{P} die Menge aller ungeraden Primzahlen. Goldbach⁹ vermutete 1742 in einem Briefwechsel mit Euler, dass sich jede gerade Zahl ≥ 4 als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt. Diese [Goldbachsche Vermutung](#) ist äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade und } n \geq 6\}, (p, q) \mapsto p + q$$

surjektiv ist. Sie konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden. Die nächstschwächere Vermutung, dass jede ungerade Zahl ≥ 5 eine Summe *dreier* Primzahlen ist, konnte wohl 2013 von Harald Helfgott¹⁰ bewiesen werden.

§4.6.7 **Definition (Bijektive Abbildung).** Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt **bijektiv** (oder auch: eine **Bijektion**), wenn sie eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (i) Für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
- (ii) f ist injektiv und surjektiv.

§4.6.8 **Beweis.** f ist genau dann injektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt; und genau dann surjektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Kombination beider Aussagen ergibt die Äquivalenz (i) \leftrightarrow (ii). ■

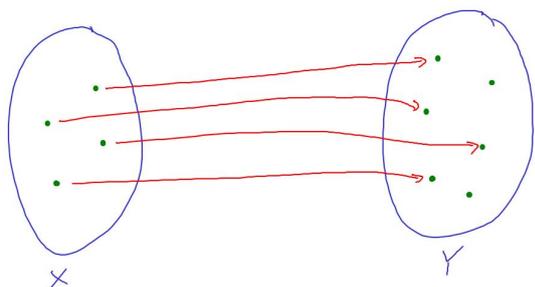


Abbildung 4.1: injektiv, aber nicht surjektiv

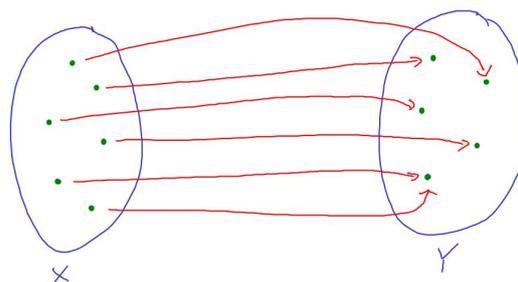


Abbildung 4.2: surjektiv, aber nicht injektiv

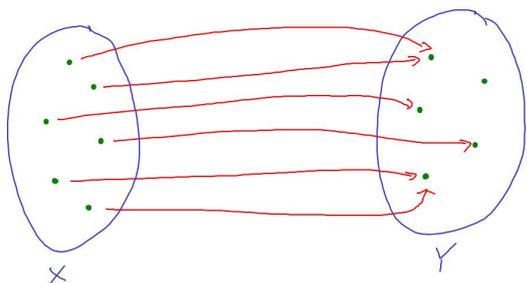


Abbildung 4.3: weder injektiv noch surjektiv

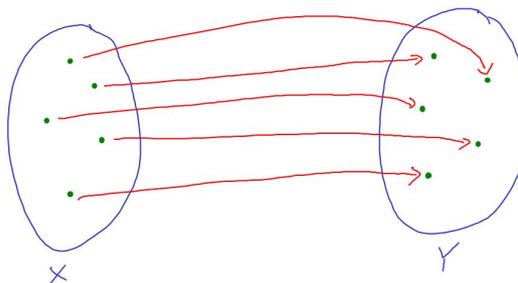


Abbildung 4.4: bijektiv

§4.6.9 **Beispiel.** Die vier Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$$

$$f_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$$

sind, obwohl sie dieselbe Zuordnungsvorschrift haben, alle voneinander verschieden, weil sie verschiedene Definitions- oder Wertebereiche haben. Es gilt:

- (1) f_1 ist weder injektiv (wegen $f_1(1) = f_1(-1)$) noch surjektiv (wegen $-1 \notin \text{im}(f)$).
- (2) f_2 ist injektiv (da jede reelle Zahl höchstens eine nichtnegative Quadratwurzel besitzt), aber nicht surjektiv.
- (3) f_3 ist surjektiv (da jede nichtnegative reelle Zahl eine reelle Quadratwurzel besitzt), aber nicht injektiv.
- (4) f_4 ist bijektiv. Denn jede nichtnegative reelle Zahl besitzt genau eine nichtnegative reelle Quadratwurzel.

§4.6.10 **Vorschau** (**Abbildungen künstlich surjektiv machen*). Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Gemäß **Definition** §4.5.5 lässt sich der Wertebereich von f auf die Menge $\text{im}(f)$ einschränken. Die dadurch erhaltene Abbildung

$$f|_{\text{im}(f)} : X \rightarrow \text{im}(f), x \mapsto f(x)$$

⁸Richard Dedekind (1831-1916)
⁹Christian Goldbach (1690-1764)
¹⁰Harald Helfgott (*1977)

ist automatisch surjektiv, da es ja für jedes $y \in \text{im}(f)$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Auf diese Weise ist es uns gelungen, f „künstlich surjektiv“ zu machen. Ist uns daran gelegen, mit surjektiven Abbildungen zu arbeiten, so stellt das also kein Problem dar, da wir den Wertebereich einer Abbildung stets auf ihr Bild einschränken können.

Ebenso ist es möglich, die Abbildung f „künstlich injektiv“ zu machen. Dabei besteht der Trick darin, zwischen solchen Elementen von X , die unter f denselben Funktionswert haben, „nicht mehr zu unterscheiden“. Die Technik „ähnliche Elemente nicht mehr voneinander zu unterscheiden“ wird in der LA1 eine prominente Rolle im Umfeld des [Homomorphiesatzes](#) spielen und kann mithilfe der in Abschnitt §5.3 thematisierten *Äquivalenzrelationen* formalisiert werden, siehe [Vorschau §5.3.18](#).

§4.7 Invertierbare Abbildungen

In diesem Abschnitt seien stets X, Y zwei Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

§4.7.1 **Definition (Umkehrabbildung).** Eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ heißt

- **linksinvers zu f** (oder auch: eine **Retraktion von f**), falls $g \circ f = \text{id}_X$.
- **rechtsinvers zu f** (in manchem Kontext auch: ein **Schnitt von f**), falls $f \circ g = \text{id}_Y$.
- **invers zu f** (oder auch: eine **Umkehrabbildung von f** oder eine **Inverse zu f**), falls sie sowohl links- als auch rechtsinvers zu f ist.

f heißt eine **invertierbare Abbildung**, wenn sie eine Umkehrabbildung besitzt.

§4.7.2 **Beispiel.**

(1) Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$$

ist invertierbar, eine Inverse ist gegeben durch die Abbildung $n \mapsto n - 1$.

(2) Subtraktion, Division, Wurzel und Logarithmus sind jeweils invers zu Addition, Multiplikation und Potenz:

Def.- und Wertebereich	Zuordnung	Inverse Zuordnung	
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$x \mapsto x + a$	$x \mapsto x - a$	(für $a \in \mathbb{R}$)
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$x \mapsto ax$	$x \mapsto \frac{x}{a}$	(für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
$\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$	$x \mapsto x^a$	$x \mapsto \sqrt[a]{x}$	(für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$	$x \mapsto a^x$	$x \mapsto \log_a(x)$	(für $a \in \mathbb{R}_{>0}$)

Du bist es ja aus der Schule gewohnt, Gleichungen, die Summen, Produkte und Potenzen enthalten, aufzulösen mittels Subtrahieren, Dividieren, Wurzelziehen und Logarithmieren.

(3) Die „Spiegelung an der x -Achse“

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$$

ist zu sich selbst invers. Selbstinverse Abbildungen heißen auch **Involutionen**.

- (4) Sei X eine beliebige Menge. Aus **Satz §4.3.3** folgt $\text{id}_X \circ \text{id}_X = \text{id}_X$, sodass id_X eine invertierbare, selbstinverse Abbildung ist.¹¹
- (5) Für $k \in \mathbb{N}_0$ betrachte die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n + 1$$

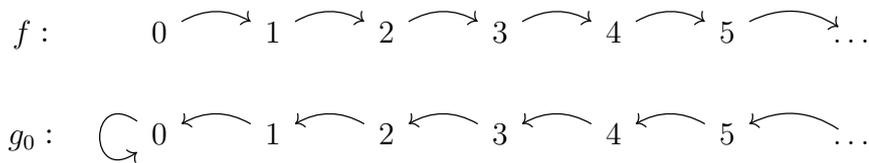
$$g_k : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} n - 1 & n \geq 1 \\ k & n = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$(g_k \circ f)(n) = g_k(n + 1) = n \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(f \circ g_k)(0) = f(k) = k + 1 \neq 0$$

sodass $g_k \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}_0}$ aber $f \circ g_k \neq \text{id}_{\mathbb{N}_0}$. Also ist zwar g_k linksinvers zu f (und dementsprechend f rechtsinvers zu g_k), aber nicht rechtsinvers zu f .



Von weiteren Abbildungen dieser Art handelt die Geschichte vom [Hilbert-Hotel](#).

§4.7.3 **Satz (Eindeutigkeit der Inversen)**. Sei f eine invertierbare Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung von f eindeutig bestimmt.¹²

§4.7.4 **Beweis**. Seien $g, h : Y \rightarrow X$ zwei Umkehrabbildungen von f . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g &= g \circ \text{id}_Y && \text{(nach Satz §4.3.3)} \\ &= g \circ (f \circ h) && \text{(da } h \text{ invers zu } f \text{ ist)} \\ &= (g \circ f) \circ h && \text{(nach Satz §4.2.4)} \\ &= \text{id}_X \circ h && \text{(da } g \text{ invers zu } f \text{ ist)} \\ &= h && \text{(nach Satz §4.3.3)} \end{aligned}$$

■

§4.7.5 **Bemerkung (Die Umkehrabbildung)**. Im Sinne von **Notation §1.3.20** berechtigt uns dieser Eindeutigkeitsatz dazu, anstelle von „einer“ Umkehrabbildung von f von *der* Umkehrabbildung von f zu sprechen. Die zu einer invertierbaren Abbildung f inverse Abbildung wird notiert mit

$$f^{-1}$$

Beachte, dass es nur dann Sinn ergibt, von „der Umkehrabbildung f^{-1} “ zu sprechen, wenn f invertierbar ist. Im Allgemeinen sind Abbildungen nicht invertierbar und wir werden in **Bemerkung §4.7.10** Techniken besprechen, mit denen sich dies beweisen lässt.

Eine bloße Links- oder Rechtsinverse braucht dagegen nicht eindeutig sein, wie **Beispiel §4.7.2** zeigt.

¹¹vgl. **Satz §6.3.18a)**

¹²vgl. **Satz §6.3.14**

§4.7.6 **Bemerkung.** Das Zeichen „ f^{-1} “ ist bereits in [Definition §4.4.1](#) aufgetaucht und bezeichnete dort Fasern und Urbildmengen. Ist f invertierbar, so trägt es nun drei verschiedene Bedeutungen zugleich:

Zeichen	Bedeutung
f	Die Abbildung $X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$
f	Die (mengenwertige) Abbildung $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, $A \mapsto f(A)$
f^{-1}	Die (mengenwertige) Abbildung $\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $B \mapsto f^{-1}(B)$
f^{-1}	Die (mengenwertige) Abbildung $Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $y \mapsto f^{-1}(y)$
f^{-1}	Die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $y \mapsto f^{-1}(y)$ (existiert nur, wenn f invertierbar ist)

Beachte, dass die ersten vier Ausdrücke immer Sinn ergeben; der fünfte aber nur dann, wenn f invertierbar ist.

§4.7.7 **Satz.** Seien X, Y zwei Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist invertierbar.

(ii) f ist bijektiv.

§4.7.8 **Beweis.** (ii)→(i): Sei f bijektiv. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, sodass durch

$$g : Y \rightarrow X, y \mapsto (\text{Das eindeutig bestimmte } x \in X \text{ mit } f(x) = y)$$

eine Abbildung definiert ist. Nun ist g invers zu f , denn:

$(g \circ f = \text{id})$: Für ein beliebiges $a \in X$ ist

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = (\text{Das eindeutig bestimmte } x \in X \text{ mit } f(x) = f(a)) = a$$

Weil $a \in X$ beliebig war, folgt die Gleichheit von Abbildungen $g \circ f = \text{id}_X$.

$(f \circ g = \text{id})$: Für ein beliebiges $b \in Y$ ist

$$(f \circ g)(b) = f(\text{Das eindeutig bestimmte } x \in X \text{ mit } f(x) = b) = b$$

Also ist $f \circ g = \text{id}_Y$.

Insgesamt ist damit gezeigt, dass g invers zu f ist.

Der Beweis der Implikation (i)→(ii) ist Inhalt von [Aufgabe §4.8.4](#). ■

§4.7.9 **Bemerkung (Bijektivität beweisen).** Ist f eine Abbildung, für die du beweisen möchtest, dass sie bijektiv ist, so stehen dir nun zwei Wege offen:

1. Du arbeitest mit [Definition §4.6.7](#), d.h. du beweist sowohl, dass f injektiv ist, als auch, dass f surjektiv ist.
2. Du arbeitest mit [Satz §4.7.7](#), d.h. du schreibst einen Kandidaten für die Umkehrabbildung hin und beweist daraufhin, dass er tatsächlich invers zu f ist.

In manchen Situationen ist es schwer bis unmöglich, eine Abbildungsvorschrift für die Umkehrabbildung zu finden. In diesem Fall ist der erste Weg leichter.

Es gibt aber auch Situationen wie z.B. in [Beispiel §4.7.2](#), in denen du bei genauem „Hinsehen“ bereits einen Kandidaten für die Umkehrabbildung ausfindig machen kannst. In diesem Fall bietet sich der zweite Weg an. Beachte auch, dass ein Beweis über den zweiten Weg stets informativer ist, da er dem Leser bereits die Gestalt der inversen Abbildung mitteilt.

§4.7.10 **Bemerkung** (*Invertierbarkeit widerlegen*). Möchtest du beweisen, dass eine Abbildung keine Umkehrabbildung besitzt, so genügt es nach [Satz §4.7.7](#) bereits, wenn du beweist, dass sie nicht injektiv oder nicht surjektiv ist.

§4.7.11 **Beispiel**. Beispielsweise gilt:

- (1) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht invertierbar, weil sie nicht injektiv ist. Denn es ist zum Beispiel $f(-5) = f(5)$.
- (2) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $n \mapsto \{n\}$ ist nicht invertierbar, weil sie nicht surjektiv ist. Denn es ist $\emptyset \notin \text{im}(f)$.

§4.8 Aufgabenvorschläge

§4.8.1 **Aufgabe (Zerlegen von Abbildungen).** Realisiert die folgenden Abbildungen als Verkettung möglichst elementarer Bausteine:

a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (3x + 1)^3$

b) Sei A die Menge aller Leute im Tutorium. Betrachte die Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}, a \mapsto$ (die Anzahl der Wörter im Erstlingswerk des Literaturnobelpreisträgers im Geburtsjahr von a).

c) $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}), X \mapsto \mathbb{Q} \setminus (X^c \cap \mathbb{Z})$

§4.8.2 **Aufgabe (Wohldefiniertheit).** An der Tafel von Captain Chaos stehen die folgenden Ausdrücke:

(i) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$

(iii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y$

(iv) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, \frac{p}{q} \mapsto p - q$

(v) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1, & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2 - 1, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

Was haltet ihr davon?

§4.8.3 **Aufgabe (injektiv, surjektiv, bijektiv (L)).** Untersucht die folgenden Abbildungen darauf, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{Q}, (z, n) \mapsto \frac{z}{n}$

c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x + 1$

d) $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \mapsto A^c$

e) $X \xrightarrow{\text{id}} X$ (für eine beliebige Menge X)

f) $X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$ (für beliebige Mengen X, Y)

§4.8.4 **Aufgabe (Vererbung von Injektivität und Surjektivität).** Seien X, Y, Z drei beliebige Mengen und $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwei Abbildungen. Beweist die folgenden Implikationen:

a) f, g injektiv $\implies g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv.

b) f, g surjektiv $\implies g \circ f$ surjektiv $\implies g$ surjektiv.

c) Invertierbare Abbildungen sind bijektiv (vgl. **Satz** §4.7.7).

Kapitel 5

Relationen

Relationen setzen die Elemente einer Menge untereinander in Beziehung. Von besonderer Bedeutung sind Ordnungs- und Äquivalenzrelationen, deren grundlegende Sprache in diesem Vortrag entwickelt und an Beispielen verdeutlicht wird.

§5.1 Allgemeines

Dieses Kapitel handelt von einer mathematischen Abstraktion des bereits im Logikkapitel in [Definition §1.3.1](#) eingeführten Relationenbegriffs.

§5.1.1 **Definition (Relation)**. Sei X eine Menge. Eine (zweistellige) **Relation auf X** ist ein mathematisches Objekt, das mit zwei beliebigen Elementen von X zu einer Aussage kombiniert werden kann.

Sind R eine Relation auf X und $x, y \in X$ zwei Elemente, so notieren wir die sich ergebende Aussage mit

$$xRy$$

und sagen: „ x steht in der Relation R zu y “.

§5.1.2 **Axiom (* Gleichheit von Relationen)**. Seien X eine Menge und R, S zwei Relationen auf X . Genau dann stimmen R und S überein, wenn hinsichtlich R und S genau dieselben Elemente in Relation zueinander stehen. Als Formel:

$$R = S \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x, y \in X : \quad xRy \leftrightarrow xSy)$$

Vergleiche dieses Axiom mit [Axiom §3.1.3](#), [Axiom §3.5.2](#) und [Axiom §4.1.2](#).

§5.1.3 **Notation (Relationen definieren)**. Seien X eine Menge und $E(a, b)$ ein zweistelliges Prädikat, für dessen beide Variablen jeweils alle Elemente von X eingesetzt werden können. Der Ausdruck

$$xRy \quad :\Leftrightarrow \quad E(x, y) \quad \quad \quad x, y \in X$$

ist als eine Definition zu verstehen: es wird eine Relation R auf X definiert mit der Eigenschaft, dass für $x, y \in X$ die Aussage xRy äquivalent zu $E(x, y)$ sei. Wegen [Axiom §5.1.2](#) ist die Relation R durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt¹. Der Buchstabe R dient hierbei als **Relationssymbol**.

§5.1.4 **Beispiel**.

(1) (Verwandtschaftsgrade) Sei M die Menge aller Menschen. Auf M gibt es beispielsweise die Relationen:

$$\begin{array}{lll} xKy & :\Leftrightarrow & x \text{ ist ein Kind von } y \\ xNy & :\Leftrightarrow & x \text{ ist ein Nachfahre von } y \\ xGy & :\Leftrightarrow & x \text{ ist Bruder oder Schwester von } y \end{array} \quad \quad \quad x, y \in M$$

¹vgl. [Definition §3.1.4](#) und [Notation §4.1.4](#)

(2) (Teilbarkeit) Man schreibt

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : k \cdot m = n \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

(lies: „ m teilt n “)

Dadurch wird eine Relation auf \mathbb{Z} definiert, die **Teilbarkeitsrelation**. Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \mid n$, so heißen m ein **Teiler** von n und n ein **Vielfaches** von m .

(3) (Teilmengenrelation) Auf der Gesamtheit aller Mengen gibt es die Teilmengenrelation \subseteq , die in [Definition §3.2.1](#) definiert wurde.

(4) (Ordnung der Zahlbereiche) Auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ gibt es die Relationen $\leq, \geq, <, >$.

§5.1.5 **Notation (Negation einer Relation)**. Seien X eine Menge, R eine Relation auf X und $x, y \in X$. Die Aussage, dass x *nicht* in Relation zu y steht, wird in vielen Fällen mit einem durchgestrichenen Relationszeichen \cancel{R} notiert.

§5.1.6 **Beispiel**.

- (1) Die Negation der Gleichheitsrelation $=$ ist die Ungleichheitsrelation \neq .
- (2) Die Negation der Elementrelation \in ist die Relation \notin („kein Element von“).
- (3) Die Negation der Teilmengenrelation \subseteq ist die Relation $\not\subseteq$ („keine Teilmenge von“).
- (4) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ wird die Aussage, dass m kein Teiler von n ist, notiert mit $m \nmid n$.

§5.1.7 **Definition (Umkehrrelation)**. Seien X eine Menge und R eine Relation auf X . Die Relation R^{op} , die definiert ist durch

$$xR^{\text{op}}y \quad :\Leftrightarrow \quad yRx \quad x, y \in X$$

heißt die **Umkehrrelation** von R (englisch: “opposite relation”).

§5.1.8 **Notation**. Abseits allgemeiner theoretischer Überlegungen ist die Schreibweise R^{op} unüblich. Stattdessen wird die Umkehrrelation häufig mit dem gespiegelten Relationszeichen notiert.

§5.1.9 **Beispiel**. Die Umkehrrelation...

- (1) ...der Teilmengenrelation \subseteq ist die Obermengenrelation \supseteq , d.h. für Mengen M, N gilt:

$$M \supseteq N \iff N \subseteq M$$

- (2) ...der „kleinergleich“-Relation \leq ist die „größergleich“-Relation \geq .

§5.1.10 **Bemerkung (*)**. Für jede Relation R gilt $(R^{\text{op}})^{\text{op}} = R$, d.h. die Umkehrrelation der Umkehrrelation von R ist wieder R selbst.

§5.1.11 **Beweis**. Sei X eine Menge mit einer Relation R . Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$x(R^{\text{op}})^{\text{op}}y \iff yR^{\text{op}}x \iff xRy$$

Weil $x, y \in X$ beliebig gewählt waren, folgt aus [Axiom §5.1.2](#), dass $(R^{\text{op}})^{\text{op}} = R$. ■

§5.1.12 **Definition (Eingeschränkte Relation).** Seien X eine Menge, R eine Relation auf X und $U \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist durch

$$x R|_U y \quad :\Leftrightarrow \quad x R y \quad \quad \quad x, y \in U$$

eine Relation auf U definiert, die **Einschränkung von R auf U** oder auch die **von X vererbte Relation**. Die eingeschränkte Relation $R|_U$ stimmt quasi mit R überein, mit dem einzigen Unterschied, dass sie nur noch auf die Elemente von U angewandt wird.

§5.1.13 **Beispiel.** Die gewöhnlichen \leq -Relationen auf \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sind allesamt Einschränkungen der \leq -Relation auf \mathbb{R} . Denn eine natürliche/ganze/rationale Zahl x ist genau dann kleinergleich eine andere solche Zahl y , wenn $x \leq y$ im Sinne reeller Zahlen gilt.

§5.1.14 **Bemerkung (* Pullback von Relationen).** Seien X, Y zwei Mengen, $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung und R eine Relation auf Y . Dann ist durch

$$a f^* R b \quad :\Leftrightarrow \quad f(a) R f(b) \quad \quad \quad a, b \in X$$

eine Relation „ $f^* R$ “ auf X gegeben, der *Pullback von R entlang f* oder die *entlang f zurückgezogene Relation*.

Im Spezialfall, dass $X \subseteq Y$ eine Teilmenge und $f = (X \xrightarrow{\iota_X} Y)$ die natürliche Inklusion sind, ist $\iota_X^* R = R|_X$ genau die Einschränkung von R auf X . Das Konzept „Einschränkung einer Relation“ ist also ein Spezialfall des Konzepts „Pullback einer Relation“.

§5.1.15 **Beispiel (* feinere/größere Relation).** Seien X eine Menge und R, S zwei Relationen auf X . Die Relation R heißt **feiner** als die Relation S (und S heißt **größer** als R), wenn gilt

$$x R y \implies x S y \quad \quad \quad \text{für alle } x, y \in X$$

also wenn je zwei Elemente, die in Relation R zueinander stehen, auch in Relation S zueinander stehen.

Bezeichnet $\text{Rel}(X)$ die Menge aller Relationen auf X , so haben wir auf $\text{Rel}(X)$ also eine „ist feiner als“-Relation.

§5.1.16 **Vorschau (* mengentheoretische Relationsdefinition).** Die Relationsdefinition [Definition §5.1.1](#) ist, ähnlich wie die Mengendefinition [Definition §3.1.1](#) und die Abbildungsdefinition [Definition §4.1.1](#), rein axiomatisch. Wenn man denn möchte, lässt sie sich aber durch eine präzise mengentheoretische Definition ersetzen:

Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Für Elemente $x, y \in X$ definiert man:

$$x R y \quad :\Leftrightarrow \quad (x, y) \in R$$

Vermöge dieser Definition wird [Axiom §5.1.2](#) zu einer beweisbaren Aussage und die „ist feiner als“-Relation aus [Beispiel §5.1.15](#) wird schlicht zur Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(X \times X)$. Für die Praxis ist sie aber wenig relevant. Stattdessen erfolgt der Umgang mit Relationen über diejenigen Prädikate, die sie definieren.

Beachte, dass nicht jede Relation durch einen einfachen sprachlichen Ausdruck gegeben sein muss. Prinzipiell können Relationen beliebig kompliziert oder gar nicht mehr sprachlich beschreibbar sein. Beim Übergang vom syntaktischen Relationsbegriff aus [Definition §1.3.1](#) zum abstrakten Relationsbegriff aus [Definition §5.1.1](#) treten die gleichen Phänomene auf, die auch in [Bemerkung §4.1.9](#) beschrieben wurden.

§5.1.17 **Beispiel** (*Universelle Relationen*). Sei X eine beliebige Menge.

- Die **Allrelation** auf X ist diejenige Relation auf X , bei der jedes Element mit jedem Element in Relation steht. Sie entspricht der trivialen Teilmenge $X \times X \subseteq X \times X$.
- Die **leere Relation** ist diejenige Relation auf X , bei der kein Element mit irgendeinem anderen in Relation steht. Sie entspricht der leeren Teilmenge $\emptyset \subseteq X \times X$.
- Die **Gleichheitsrelation** auf X ist die Relation $=$, bei der zwei Elemente genau dann in Relation stehen, wenn sie identisch sind.

§5.1.18 **Bemerkung** (** Dualität zwischen Syntax und Semantik*). Im Verlauf der letzten Kapitel wurde der Reihe nach sprachlich-syntaktischen Gebilden aus der Logik (Aussagen, Eigenschaften, Terme, Relationen im Sinne von [Definition §1.3.1](#)) semantisch-abstrakte Pendanten (Wahrheitswerte, Mengen, Abbildungen, Relationen im Sinne von [Definition §5.1.1](#)) an die Seite gestellt. Dies ist kein Zufall und kommt von der intimen Verschränkung von Prädikatenlogik und Mengenlehre. Eine logische Sprache zur Beschreibung einer mathematischen Theorie sollte bereits in ihrer Grammatik gewisse Strukturen der Theorie reflektieren. Umgekehrt werden mathematische Theorien so entwickelt, dass sie der Beschreibung durch eine gegebene Sprache möglichst zugänglich sind. Dies ist die Dualität zwischen Syntax und Semantik. In der Tatsache, dass sich einerseits beinahe alle Mathematik in Prädikatenlogik formulieren lässt, und andererseits die Mengenlehre eine vollständige Interpretation der prädikatenlogischen Sprache zulässt, liegt der Grund für die breite Nutzbarkeit mengentheoretischen Denkens, das seit Beginn des 20. Jahrhunderts den populärsten Rahmen zur Formalisierung von Algebra und Analysis bereitstellt.² Nichtsdestotrotz wirst du bereits in den ersten Semestern an die Grenzen dieses Denkens stoßen, wenn es um den Gebrauch bestimmter Artikel (*die* Menge der reellen Zahlen, *der* Faktorraum V/U , etc.) für Objekte, die genau genommen gar nicht eindeutig bestimmt im Sinne von [Notation §1.3.20](#) sind, geht. Einige Entsprechungen sprachlicher Gebilde und abstrakter mathematischer Objekte:

Syntax	Semantik
Aussage	Wahrheitswert
Eigenschaft	Teilmenge
\wedge und \vee	\cap und \cup
Term	Abbildung
Termsubstitution	Verketten von Abbildungen
Relationen nach Definition §1.3.1	Relationen nach Definition §5.1.1

Diese Liste soll aber nur als suggestive Merkhilfe gelesen werden. *Die eine* Syntax-Semantik-Dualität gibt es nicht, da sowohl aufseiten der Syntax viele verschiedene Kalküle (Einsortige und mehrsortige Prädikatenlogik, Lambda-Kalkül, infinitäre Logiken, usw.), als auch aufseiten der Semantik viele verschiedene Interpretationsweisen (mengentheoretische Modelle, kategorielle Semantik, Kripke-Joyal-Semantik, usw.) in Gebrauch sind, die alle mit ihrer eigenen Syntax-Semantik-Dualität aufwarten.

§5.1.19 **Definition** (*Einige Eigenschaften von Relationen*). Seien X eine Menge und R eine Relation auf X . Dann heißt die Relation R

- **reflexiv**, falls für alle $x \in X$ gilt, dass xRx . Mit anderen Worten: jedes Element steht in Relation zu sich selbst.

²vgl. [Vorschau §1.3.23](#)

- **transitiv**, falls für alle $x, y, z \in X$ mit xRy und yRz gilt, dass auch xRz .
- **symmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ mit xRy auch yRx gilt.
- **antisymmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ mit xRy und yRx gilt, dass $x = y$.

In Formeln liest sich das leichter:

reflexiv:	xRx	für alle $x \in X$
transitiv:	$(xRy \text{ und } yRz) \implies xRz$	für alle $x, y, z \in X$
symmetrisch:	$xRy \implies yRx$	für alle $x, y \in X$
antisymmetrisch:	$(xRy \text{ und } yRx) \implies x = y$	für alle $x, y \in X$

§5.1.20 **Bemerkung**. Symmetrische Relationen können ebensogut über die Formel

$$xRy \iff yRx \quad \text{für alle } x, y \in X$$

definiert werden (also mit \iff anstelle von \implies). Denn wenn für alle $x, y \in X$ aus xRy schon yRx folgt, so folgt auch aus yRx schon xRy , weil die Rollen von x und y einfach vertauscht werden können.

Eine Relation ist genau dann symmetrisch, wenn sie mit ihrer Umkehrrelation übereinstimmt.

§5.1.21 **Beispiel** (*Verwandtschaftsgrade*). Sei M die Menge aller Menschen.

- (1) Die Relation „...ist ein Kind von ...“ ist nicht reflexiv, da niemand sein eigenes Kind sein kann. Ebenso ist sie nicht symmetrisch, da meine Eltern nicht meine Kinder sind. Schließlich ist sie auch nicht transitiv, da, abgesehen von inzestuösen Verhältnissen, die Enkel eines Menschen x keine Kinder von x sind.
- (2) Die Relation „...ist ein Nachfahre von ...“ ist dagegen transitiv, weil die Nachfahren der Nachfahren eines Menschen x ebenfalls Nachfahren von x sind. Symmetrisch ist sie allerdings nicht.
- (3) Die Relation „...ist Bruder oder Schwester von ...“ ist symmetrisch. Sofern wir jeden Menschen auch als Bruder bzw. Schwester von sich selbst ansehen, ist sie auch reflexiv und transitiv.

§5.1.22 **Beispiel** (*symmetrisch vs. antisymmetrisch*). Die Eigenschaften „symmetrisch“ und „antisymmetrisch“ sind, anders als es die Wörter vielleicht vermuten lassen, keine Gegensätze.

- (1) Sei X eine beliebige Menge. Sowohl die leere Relation als auch die Gleichheitsrelation auf X sind zugleich symmetrisch und antisymmetrisch.
- (2) Die Teilbarkeitsrelation auf \mathbb{Z} ist weder symmetrisch (da etwa $2 \mid 6$ aber $6 \nmid 2$) noch antisymmetrisch (da etwa $4 \mid -4$ und $-4 \mid 4$, aber $4 \neq -4$).

§5.1.23 **Bemerkung** (*Die eigentliche Bedeutung der Transitivität*). Seien X eine Menge mit einer Relation R und $a, b, c, d \in X$ eine Handvoll Elemente von X . Anstelle von „Es gilt aRb, bRc und cRd “ schreibt man kurz³

$$aRbRcRd$$

³vgl. Notation §2.3.10

Beispielsweise schreibt man

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

oder

$$2 < 4 < 8 < 12 < 15$$

Mit dieser Notation lässt sich die Definition der Transitivität durch folgende Formel ausdrücken:

$$xRyRz \implies xRz \quad x, y, z \in X$$

Transitivität heißt also, dass sich jede aus drei Gliedern bestehende Relationenkette „zusammenziehen“ lässt. Es lässt sich zeigen, dass dies bei transitiven Relationen auch für beliebig lange Ketten gilt. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x_1, \dots, x_n \in X$ gilt:

$$x_1R \dots Rx_n \implies x_1Rx_n \quad (\text{sofern } R \text{ transitiv ist})$$

Im Spezialfall, dass R die Gleichheitsrelation ist, hast du das auch schon in der Schule andauernd ausgenutzt: Sind x_1, \dots, x_n irgendwelche Zahlen/Vektoren/Funktionen/etc., so gilt

$$x_1 = \dots = x_n \implies x_1 = x_n$$

Beachte, dass diese Schlussfolgerung bei nicht-transitiven Relationen unzulässig ist. Beispielsweise gilt

$$2 \cdot 6 \neq 3 \cdot 6 \neq 3 \cdot 4$$

aber die Folgerung, dass deswegen auch $2 \cdot 6 \neq 3 \cdot 4$ gälte, wäre falsch. Ungleichheit von Zahlen ist keine transitive Relation.

§5.1.24 **Satz** (* *Stabilität unter Umkehrung und Einschränkung*). Seien X eine Menge, R eine Relation auf X und E eine der vier Eigenschaften „reflexiv“, „transitiv“, „symmetrisch“, „antisymmetrisch“. Dann gilt:

- Besitzt R die Eigenschaft E , so besitzt auch die Umkehrrelation R^{op} die Eigenschaft E .
- Besitzt R die Eigenschaft E , so besitzt für jede Teilmenge $U \subseteq X$ auch die Einschränkung $R|_U$ die Eigenschaft E .⁴

§5.1.25 **Beweis**.

- (Reflexivität): Sei R reflexiv. Für jedes $x \in X$ gilt dann xRx , also auch $xR^{\text{op}}x$. Damit ist auch R^{op} reflexiv.

(Transitivität): Seien R transitiv und $x, y, z \in X$ mit $xR^{\text{op}}yR^{\text{op}}z$. Also gilt $zRyRx$ und aus der Transitivität von R ergibt sich zRx , also $xR^{\text{op}}z$. Da $x, y, z \in X$ beliebig gewählt waren, ist damit gezeigt, dass auch R^{op} transitiv ist.

(Symmetrie): Ist R symmetrisch, so ist $R^{\text{op}} = R$, sodass auch R^{op} symmetrisch ist.

(Antisymmetrie): Seien R antisymmetrisch und $x, y \in X$ mit $xR^{\text{op}}y$ und $yR^{\text{op}}x$. In Termen von R heißt das yRx und xRy , sodass sich $y = x$ aus der Antisymmetrie von R ergibt. Also ist $x = y$, sodass auch R^{op} antisymmetrisch ist.

- Bei den Definitionen von Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie handelt es sich jeweils um Allaussagen über die Elemente von X . Wenn diese Aussagen für alle Elemente von X gelten, so erst recht auch für alle Elemente der Teilmenge U . ■

⁴Allgemeiner sind die drei Eigenschaften „reflexiv“, „transitiv“ und „symmetrisch“ jeweils „stabil unter Pullback“, d.h. jeder Pullback einer Relation mit einer dieser drei Eigenschaften besitzt ebenfalls diese Eigenschaft. Vgl. **Bemerkung** §5.3.4.

§5.2 Ordnungsrelationen

§5.2.1 **Notation.** Bisher habe ich allgemeine Relationen mit dem Buchstaben „ R “ notiert. Ordnungsrelationen sind Verallgemeinerungen der bekannten „ \leq “-Relation auf den Zahlräumen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, weshalb eine allgemeine Ordnungsrelation meist mit dem Zeichen \leq notiert wird. Beachte allerdings, dass eine Ordnungsrelation im Allgemeinen nichts mit den herkömmlichen Ordnungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ zu tun haben muss!

§5.2.2 **Definition (Ordnungsrelation).** Sei X eine beliebige Menge. Eine Relation \leq auf X heißt **Ordnungsrelation** (auch: *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*⁵), wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. In Formeln:

$$\begin{aligned} \text{(O1)} \quad & \forall x \in X : && x \leq x && \text{(Reflexivität)} \\ \text{(O2)} \quad & \forall x, y, z \in X : && (x \leq y \text{ und } y \leq z) \implies x \leq z && \text{(Transitivität)} \\ \text{(O3)} \quad & \forall x, y \in X : && (x \leq y \text{ und } y \leq x) \implies x = y && \text{(Antisymmetrie)} \end{aligned}$$

Eine **geordnete Menge** ist ein Paar (X, \leq) , bestehend aus einer Menge X und einer Ordnungsrelation \leq auf X . Sofern die Ordnungsrelation im Kontext klar oder gleichgültig ist, spricht man auch schlicht von „der geordneten Menge X “.

§5.2.3 Beispiel

- (1) Die herkömmliche „kleinergleich“-Relation \leq ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ und \mathbb{N} . Sprechen Mathematiker von „der geordneten Menge \mathbb{R} “, so ist damit in der Regel die geordnete Menge (\mathbb{R}, \leq) gemeint.
- (2) (Teilmengenrelation) Sei M eine beliebige Menge. Dann ist die Teilmengenrelation \subseteq eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$. Dies wurde in **Satz §3.2.4** bewiesen. Somit ist $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ eine geordnete Menge. Sofern nicht anders erwähnt, werde ich $\mathcal{P}(M)$ fortan stets mit der Teilmengenordnung ausstatten. Ist von „der geordneten Menge $\mathcal{P}(M)$ “ die Rede, so ist damit die geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ gemeint.
- (3) (* Fortsetzung und Einschränkung) Seien X, Y zwei Mengen und⁶

$$\Sigma := \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}(X)} \text{Abb}(A, Y)$$

Für $(A, f), (B, g) \in \Sigma$ sei

$$(A, f) \leq (B, g) \quad :\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \quad \text{und} \quad g|_A = f$$

Mit anderen Worten: $(A, f) \leq (B, g)$ genau dann, wenn g eine Fortsetzung von f ist im Sinne von **Definition §4.5.3**. Dann ist durch \leq eine Ordnungsrelation auf Σ gegeben.

⁵ aber diese Bezeichnungen sind mir verhasst, weil sie den Irrtum nahelegen, Ordnungsrelationen seien irgendwie „unvollständig“ und könnten und sollten zu Totalordnungen (**Definition §5.2.13**) „vervollständigt“ werden.

⁶ Zur Definition von \bigsqcup siehe **Definition §3.6.17**.

§5.2.4 **Notation.** Sei (X, \leq) eine geordnete Menge. Für $x, y \in X$ schreibt man⁷

$$\begin{aligned} x \geq y & \quad :\Leftrightarrow \quad y \leq x \\ x < y & \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \text{und} \quad y \not\leq x \\ x > y & \quad :\Leftrightarrow \quad y < x \end{aligned}$$

Es sind \geq und $>$ per Definition genau die Umkehrrelationen von \leq und $<$ im Sinne von [Definition §5.1.7](#). Für $a \in X$ verwende ich gerne folgende Notation:

$$X_{\leq a} := \{x \in X \mid x \leq a\} \qquad X_{\geq a} := \{x \in X \mid x \geq a\}$$

und analog sind $X_{< a}$ und $X_{> a}$ definiert. Zum Beispiel ist $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{N}_{\geq 1}$ die Menge der bei Eins beginnenden natürlichen Zahlen.

§5.2.5 **Satz.** Sei (X, \leq) eine geordnete Menge. Dann gilt:

- Die Umkehrrelation \geq ist ebenfalls eine Ordnungsrelation auf X , die sogenannte **Umkehrordnung**.
- Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ist die Einschränkung von \leq auf U ebenfalls eine Ordnungsrelation, die **auf U induzierte Ordnung** oder **von X geerbte Ordnung**.

§5.2.6 **Beweis.** Dies ergibt sich direkt aus [Satz §5.1.24](#). ■

§5.2.7 **Bemerkung.**

- Ist U eine Teilmenge einer geordneten Menge, so wird meist auch U stillschweigend als geordnete Menge angesehen. Beispielsweise trägt die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{>0}$ die von \mathbb{R} geerbte Ordnung, was in der Regel nicht nochmal explizit erwähnt wird.
- Die Relationen $<$ und $>$ sind keine Ordnungsrelationen, weil sie nicht reflexiv sind. An der Uni sehen wir die Relation \leq als „primär“ und die Relation $<$ als daraus abgeleitet an.⁸

§5.2.8 **Beispiel** (*Präordnungen). Eine Relation heißt **Präordnung**, wenn sie reflexiv und transitiv ist (aber nicht unbedingt antisymmetrisch). Jede Ordnungsrelation ist eine Präordnung. Beispiele für Präordnungen, die keine Ordnungsrelationen sind:

- (Teilbarkeit) Die Teilbarkeitsrelation auf \mathbb{Z} ist eine Präordnung, d.h. reflexiv und transitiv, aber keine Ordnungsrelation, weil sie nicht antisymmetrisch ist.

§5.2.9 **Beweis.** (reflexiv): Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist $1 \cdot n = n$, sodass $n \mid n$.

(transitiv): Seien $l, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $l \mid m \mid n$. Demzufolge gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $rl = m$ und $sm = n$. Es folgt

$$n = s \cdot m = s \cdot (r \cdot l) = (s \cdot r) \cdot l$$

sodass auch $l \mid n$. Da $l, m, n \in \mathbb{Z}$ beliebig gewählt waren, ist die Teilbarkeitsrelation also transitiv.

(nicht antisymmetrisch): Wegen $-2 = (-1) \cdot 2$ und $2 = (-1) \cdot (-2)$ gilt $2 \mid -2$ und $-2 \mid 2$. Weil aber $2 \neq -2$, ist die Teilbarkeitsrelation nicht antisymmetrisch. ■

⁷vgl. die \subsetneq -Relation aus [Definition §3.2.1](#)

⁸Die einzige mir bekannte Ausnahme stellt die Theorie der [fundierten Relationen](#) dar, wo $<$ wichtiger als \leq ist und Induktionsbeweisen zugrundeliegt.

(2) (Logische Implikation) Sei \mathcal{A} die Menge aller mathematischen Aussagen. Dann ist die Relation

$$A \leq B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es lässt sich beweisen, dass } A \rightarrow B \quad A, B \in \mathcal{A}$$

eine Präordnung, d.h. reflexiv und transitiv. Sie ist jedoch nicht antisymmetrisch und somit keine Ordnungsrelation.⁹

§5.2.10 **Beweis.** (reflexiv): Die Reflexivität wurde in **Satz** §2.2.5 bewiesen.

(transitiv): Die Transitivität ergibt sich aus **Satz** §2.2.14.

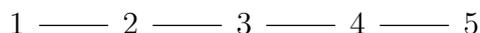
(nicht antisymmetrisch): Beispielsweise gilt für $x \in \mathbb{R}$ und die Aussagen $A :\Leftrightarrow x = 4$ und $B :\Leftrightarrow 2x = 8$, dass $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$. Dennoch sind A und B zwei (äquivalente, aber) verschiedene Aussagen. ■

§5.2.11 **Definition (Hasse-Diagramm).** Sei (X, \leq) eine geordnete Menge, die nur endlich viele Elemente enthält. Ein **Hasse-Diagramm**¹⁰ von X besteht aus:

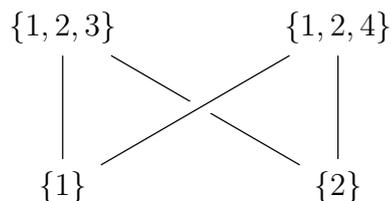
- Für jedes Element von X ein Knotenpunkt.
- Für je zwei verschiedene Elemente $a, b \in X$ mit $a < b$, für die es kein $x \in X$ mit $a < x < b$ gibt, ein Kantenstrich zwischen den Punkten a und b . Außerdem soll das „größere“ Element b in einer einheitlich festgelegten Richtung vom Punkt a , etwa oberhalb von a oder rechts von a , eingezeichnet sein.

§5.2.12 **Beispiel.** Hier sind ein paar Beispiele für Hasse-Diagramme:

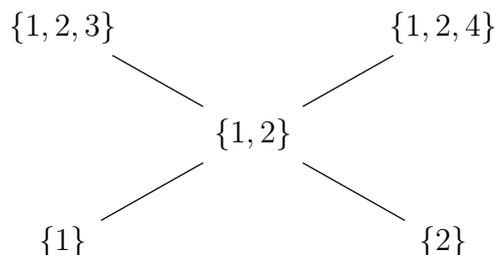
(1) Die geordnete Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (mit der gewöhnlichen, von \mathbb{N} induzierten Ordnung) kann visualisiert werden durch:



(2) Die geordnete Menge $(\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}, \subseteq)$ sieht folgendermaßen aus:



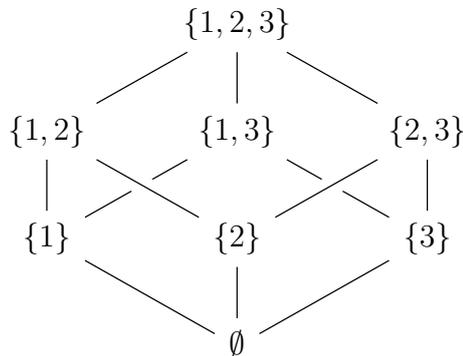
(3) Die geordnete Menge $(\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}, \subseteq)$ hat die folgende Form:



⁹Mittels Übergang zur *Lindenbaum-Algebra* kann sie allerdings künstlich antisymmetrisch gemacht werden, vgl. **Beispiel** §5.3.17.

¹⁰Helmut Hasse (1898-1979)

(4) Die geordnete Menge $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)^{11}$ sieht folgendermaßen aus:



(5) In manchen Fällen können auch geordnete Mengen mit unendlich vielen Elementen mit einer Art Hasse-Diagramm visualisiert werden. Beispielsweise lässt sich (\mathbb{Z}, \leq) darstellen als:



Systematisch werden Hasse-Diagramme in der Drittsemester-Vorlesung „Algebra 1“ gezeichnet, wenn es um die Darstellung von *Untergruppenverbänden* geht.

§5.2.13 **Definition (Vergleichbarkeit).** Ist (X, \leq) eine geordnete Menge, so heißen zwei Elemente $x, y \in X$ miteinander **vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Die Ordnungsrelation \leq heißt eine **Totalordnung**, wenn alle Elemente miteinander vergleichbar sind. Als Formel:

$$\leq \text{ ist eine Totalordnung} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in X : \quad x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x$$

Ist \leq eine Totalordnung auf X , so heißt das Paar (X, \leq) eine **totalgeordnete Menge**.

§5.2.14 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) (\mathbb{R}, \leq) ist eine totalgeordnete Menge, d.h. von je zwei reellen Zahlen ist stets die eine kleinergleich die andere. Ebenso sind auch (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) und (\mathbb{Q}, \leq) jeweils totalgeordnete Mengen.
- (2) In der geordneten Menge $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ sind die Elemente $\{1\}$ und $\{1, 2\}$ miteinander vergleichbar, da $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$. Die Elemente $\{1\}$ und $\{2\}$ sind dagegen nicht miteinander vergleichbar, da weder $\{1\} \subseteq \{2\}$ noch $\{2\} \subseteq \{1\}$ gilt.
- (3) Allgemein gilt für eine beliebige Menge M mit mindestens zwei verschiedenen Elementen, dass die geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ nicht totalgeordnet ist. Allerdings besitzt sie die Struktur einer sogenannten *Boolschen Algebra*.¹²

§5.2.15 **Bemerkung.**

- a) Die Umkehrordnung einer Totalordnung ist ebenfalls eine Totalordnung. Beispielsweise sind auch (\mathbb{N}, \geq) , (\mathbb{Z}, \geq) , (\mathbb{Q}, \geq) , (\mathbb{R}, \geq) jeweils totalgeordnete Mengen.

¹¹vgl. **Beispiel** §3.4.2

¹²vgl. **Vorschau** §1.4.1

- b) Jede Teilmenge einer totalgeordneten Menge ist mit der geerbten Ordnung ebenfalls totalgeordnet. Beispielsweise sind auch $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$ und das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ jeweils totalgeordnete Mengen.

§5.2.16 **Bemerkung** (*Intuition für Totalordnungen*). Das Hasse-Diagramm einer totalgeordneten Menge hat stets die Gestalt einer einzigen Linie. Aus diesem Grund werden Totalordnungen manchmal auch *lineare Ordnungen* genannt. Allgemein hat sich für mich die Intuition bewährt, mir die Elemente einer totalgeordneten Menge X „auf einem Streifen aufgereiht“ vorzustellen. Sind $x, y \in X$, so gilt, da x und y miteinander vergleichbar sind, dass $x \leq y$ oder $y \leq x$, also dass x auf dem Streifen wahlweise links oder rechts von y zu verorten ist.

Für nicht-total geordnete Mengen versagt diese Intuition allerdings.

§5.2.17 **Definition** (*Intervalle in \mathbb{R}*). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann heißen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das **offene Intervall** mit den Randpunkten a und b ,
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das **abgeschlossene Intervall** mit den Randpunkten a und b .
- Die Mengen $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ heißen **halboffene Intervalle** mit Randpunkten a und b .

Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ unterscheidet sich vom offenen Intervall (a, b) lediglich dadurch, dass in $[a, b]$ auch noch die beiden „Randpunkte“ a und b enthalten sind, während sie bei (a, b) fehlen.

Diese Definitionen ergeben auch Sinn, wenn man \mathbb{R} durch eine beliebige geordnete Menge, wie z.B. die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ aus **Definition** §7.1.5, ersetzt.

§5.2.18 **Notation** (*offene Intervalle vs. Paare*). Das offene Intervall (a, b) besteht also aus genau denjenigen Elementen, die zwischen a und b liegen. Es ist nicht zu verwechseln mit dem Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ aus **Definition** §3.5.7. Da sowohl für das Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als auch für das offene Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ dieselbe Notation verwendet wird, musst du beim Lesen mathematischer Texte aus dem Kontext ableiten, von welchem Objekt die Rede ist. Die bei manchen Autoren vorherrschende Schreibweise $]a, b[$ anstelle von (a, b) werde ich nicht verwenden.

§5.2.19 **Definition**. Sei X eine geordnete Menge. Ein Element $a \in X$ heißt

- **kleinstes Element** (oder auch: **Minimum**) von X , falls für jedes $x \in X$ gilt, dass $a \leq x$. Mit anderen Worten: „Jedes Element ist größergleich x “.
- **größtes Element** (oder auch: **Maximum**) von X , falls für jedes $x \in X$ gilt, dass $x \leq a$.
- **minimales Element** von X , falls es kein $x \in X$ gibt, für das $x < a$ gälte. Mit anderen Worten: „Es gibt kein strikt kleineres Element“.
- **maximales Element** von X , falls es kein $x \in X$ gibt, für das $a < x$ gälte.

§5.2.20 **Satz** (*Eindeutigkeit kleinster/größter Elemente*). Sei X eine geordnete Menge. Sofern X ein kleinstes bzw. größtes Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.

§5.2.21 **Beweis**. Seien $a, b \in X$ zwei kleinste Elemente. Da a ein kleinstes Element ist, gilt $a \leq b$, und da b ein kleinstes Element ist, gilt $b \leq a$. Aus der Antisymmetrie von \leq folgt $a = b$.

Die Aussage über größte Elemente wird analog bewiesen. ■

§5.2.22 **Notation.** Dies rechtfertigt es, von *dem* Minimum bzw. *dem* Maximum von X zu sprechen, im Sinne von **Notation** §1.3.20. Notation:

$$\min(X) \quad \text{und} \quad \max(X)$$

Beachte allerdings, dass ein kleinstes oder größtes Element nicht unbedingt existieren braucht.

§5.2.23 **Beispiel.**

- (1) \mathbb{N} enthält ein kleinstes Element, nämlich die Null. Allerdings gibt es keine größte natürliche Zahl, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n + 1 > n$.
- (2) Für jede beliebige Menge M ist \emptyset das kleinste und M das größte Element von $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$.
- (3) Die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen enthält kein kleinstes Element. Dies wurde in **Beispiel** §2.6.25 bewiesen.
- (4) Die geordnete Menge $(\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}, \subseteq)$ enthält weder ein kleinstes noch ein größtes Element. Dennoch sind $\{1\}$ und $\{2\}$ jeweils minimale Elemente und $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 4\}$ jeweils maximale Elemente.
- (5) Auf jeder beliebigen Menge X ist die Gleichheitsrelation $=$ eine Ordnungsrelation. Diesbezüglich ist *jedes* Element sowohl minimal als auch maximal. Im Gegensatz zu kleinsten und größten Elementen brauchen minimale und maximale Elemente also nicht eindeutig sein.

§5.2.24 **Satz.** Sei X eine geordnete Menge. Dann gilt:

- a) Jedes kleinste Element von X ist auch ein minimales Element.
- b) Ist X totalgeordnet, ist auch jedes minimale Element ein kleinstes Element.

Analoge Aussagen gelten für größte und maximale Elemente.

§5.2.25 **Beweis.**

- a) Sei $a \in X$ ein kleinstes Element. Angenommen, es gäbe ein $x \in X$ mit $x < a$, also $x \leq a$ und $a \not\leq x$. Dann widerspräche $a \not\leq x$ der Eigenschaft von a , ein kleinstes Element zu sein.
- b) Seien X totalgeordnet und $a \in X$ ein minimales Element. Sei $x \in X$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $a \leq x$. Weil X totalgeordnet ist, gilt $a \leq x$ oder $x \leq a$, sodass eine Fallunterscheidung vorgenommen werden kann:
 - 1) Im Fall $a \leq x$ ist nichts mehr zu zeigen.
 - 2) Im Fall $x \leq a$ folgt aus der Minimalität von a , dass auch $a \leq x$ gelten muss.

Also gilt in jedem Fall $a \leq x$. Da x beliebig gewählt wurde, ist somit a ein kleinstes Element.

Die Aussagen über größte und maximale Elemente werden analog bewiesen. ■

§5.2.26 **Bemerkung.** Im totalgeordneten Fall sind die Begriffe „Minimum“ und „minimales Element“ also gleichbedeutend. Vor allem der für die Analysis wichtige Fall (\mathbb{R}, \leq) ist davon abgedeckt. Dagegen zeigt **Beispiel** §5.2.23, dass es im nicht-total geordneten Fall durchaus minimale Elemente geben kann, die kein Minimum sind. Die Terminologie von „Minimum“ und „minimalem Element“ ist unglücklich verwirrend und ich empfehle, das Wort „Minimum“ nur im totalgeordneten Fall zu verwenden und andernfalls von „kleinsten Elementen“ zu sprechen.

Schranken

§5.2.27 **Definition (Schranken).** Seien X eine geordnete Menge und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in X$ heißt

- eine **untere Schranke** für T , wenn für alle $t \in T$ gilt: $x \leq t$.
- eine **obere Schranke** für T , wenn für alle $t \in T$ gilt: $t \leq x$.

Die Teilmenge $T \subseteq X$ heißt

- **nach unten beschränkt** (in X), wenn es in X mindestens eine untere Schranke für T gibt.
- **nach oben beschränkt** (in X), wenn es in X mindestens eine obere Schranke für T gibt.
- **beschränkt** (in X), wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

§5.2.28 Beispiel.

- (1) Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt. Eine untere Schranke ist beispielsweise die Null. Ebenso ist jede negative Zahl eine untere Schranke.
- (2) Sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Nach dem Satz von Euklid [Beispiel §2.5.12](#) besitzt \mathbb{P} keine obere Schranke in \mathbb{N} .
- (3) Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist beschränkt in \mathbb{R} . Beispielsweise sind 1 eine obere Schranke und 0 eine untere Schranke.

§5.2.29 Bemerkung.

- Beachte, dass Beschränktheit ein „relativer“ Begriff ist: wir sprechen stets von der Beschränktheit von T in X . Beispielsweise ist das Intervall $(0, 1]$ in $\mathbb{R}_{>0}$ nach unten unbeschränkt, da es keine positive Zahl gibt, die kleiner als jede Zahl zwischen 0 und 1 wäre. In \mathbb{R} hingegen ist $(0, 1]$ nach unten beschränkt, eine untere Schranke ist beispielsweise die 0.
- Eine Teilmenge hat im Allgemeinen viele verschiedene Schranken. Beispielsweise ist jedes $x \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine untere Schranke für $(0, 1]$. Allerdings ist die untere Schranke 0 in gewisser Weise „optimal“, sie grenzt $(0, 1]$ nach unten am engst möglichen ein.

§5.2.30 **Definition (Infimum und Supremum).** Seien X eine geordnete Menge und $T \subset X$ eine Teilmenge.

- Ein Element $a \in X$ heißt **Infimum** von T , wenn a eine größte untere Schranke für T ist. Das heißt, a ist eine untere Schranke für T und für jede weitere untere Schranke x gilt $x \leq a$.
- Ein Element $a \in X$ heißt **Supremum** von T , wenn a eine kleinste obere Schranke für T ist. Das heißt, a ist eine obere Schranke für T und für jede weitere obere Schranke x gilt $a \leq x$.

§5.2.31 **Notation.** Weil Infima und Suprema als kleinste bzw. größte Elemente gewisser Schrankenmengen definiert wurden, folgt aus [Satz §5.2.20](#), dass sie, sofern sie existieren, eindeutig bestimmt sind. Sofern die Teilmenge $T \subseteq X$ ein Infimum oder ein Supremum in X besitzt, ist es, im Sinne von [Notation §1.3.20](#), also gerechtfertigt, von *dem* Infimum bzw. *dem* Supremum zu sprechen. Notation:

$$\inf(T) \quad \text{und} \quad \sup(T)$$

Beachte allerdings, dass Infimum und Supremum nicht unbedingt existieren brauchen.

Sofern sie existieren, gelten für jedes $x \in X$ folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \leq \inf(T) &\Leftrightarrow \forall t \in T : x \leq t \\ \sup(T) \leq x &\Leftrightarrow \forall t \in T : t \leq x \end{aligned}$$

Dies sind zwei Beispiele für eine sogenannte *universelle Eigenschaft*, die du dir einprägen solltest. In diesen beiden Ungleichungen ist die gesamte Definition von Infimum und Supremum kompakt kodiert.

§5.2.32 Beispiel.

- (1) Weil \mathbb{N} in \mathbb{Z} nicht nach oben beschränkt ist, also gar keine einzige obere Schranke besitzt, besitzt \mathbb{N} erst recht kein Supremum in \mathbb{Z} .
- (2) Das offene Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ besitzt 0 als Infimum und 1 als Supremum. Allerdings sind $0, 1 \notin (0, 1)$. Dieses Beispiel zeigt, dass das Infimum bzw. Supremum einer Teilmenge T nicht unbedingt auch ein Element von ihr sein braucht. Wenn doch, handelt es sich um ein Minimum bzw. Maximum von T im Sinne von [Definition §5.2.19](#).
- (3) In der geordneten Menge $(\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}, \subseteq)$ (vgl. [Beispiel §5.2.12](#)) besitzt die Teilmenge $T := \{\{1\}, \{2\}\}$ kein Supremum. Zwar besitzt sie genau zwei obere Schranken, nämlich $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 4\}$, aber da keine der beiden kleiner als die andere ist, ist keine der beiden ein Supremum von T .
- (4) In der geordneten Menge $(\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}, \subseteq)$ (vgl. [Beispiel §5.2.12](#)) besitzt die Teilmenge $T := \{\{1\}, \{2\}\}$ dagegen ein Supremum, nämlich $\{1, 2\}$.
- (5) Sei M eine beliebige Menge. Dann besitzt jede Teilmenge $T \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein Infimum, nämlich $\bigcap T$ (wobei wir $\bigcap \emptyset := M$ setzen) und ein Supremum, nämlich $\bigcup T$.¹³
- (6) Es ist $T := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{Q} , die weder ein Supremum noch ein Infimum in \mathbb{Q} besitzt. In \mathbb{R} besitzt sie dagegen welche, nämlich $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.
- (7) Das *Vollständigkeitsaxiom* besagt, dass jede nichtleere beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ein Infimum und ein Supremum in \mathbb{R} besitzt.

§5.2.33 **Bemerkung** (**Verallgemeinerbarkeit auf Präordnungen*). Eine Analyse ergibt, dass sich alle Definitionen und nahezu alle Sätze aus diesem Abschnitt über Ordnungsrelationen verallgemeinern lassen auf sogenannte *prägeordnete Mengen*, d.h. Mengen mit einer reflexiven und transitiven (aber nicht unbedingt antisymmetrischen) Relation. Die einzigen Aussagen, die im prägeordneten Fall nicht mehr gelten, sind die Eindeutigkeit kleinster und größter Elemente sowie die Eindeutigkeit von Infima und Suprema – in die Eindeutigkeitsbeweise ging essenziell die Antisymmetrie ein.

§5.2.34 **Bemerkung** (**Dualitätsprinzip für geordnete Mengen*). Nach [Satz §5.2.5](#) ist für jede geordnete Menge (X, \leq) auch (X, \geq) eine geordnete Menge. Zwischen \leq und der Umkehrordnung \geq besteht eine weitreichende Dualität. Für eine Teilmenge $T \subseteq X$ sind beispielsweise die oberen Schranken von T in der geordneten Menge (X, \leq) genau die unteren Schranken von T in der geordneten Menge (X, \geq) . Man hat folgende Dualitätsbeziehungen:

¹³ Geordnete Mengen, in denen jede endliche Teilmenge ein Infimum und ein Supremum besitzt, heißen *Verbände*. Besitzt sogar *jede* Teilmenge ein Infimum und ein Supremum, so spricht man von einem *vollständigen Verband*. Das Beispiel zeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein vollständiger Verband ist für jede beliebige Menge M .

(X, \leq)	(X, \geq)
kleinstes Element	größtes Element
minimales Element	maximales Element
nach unten beschränkte Teilmenge	nach oben beschränkte Teilmenge
untere Schranke	obere Schranke
Infimum	Supremum

Begriffe wie „vergleichbare Elemente“ sind sogar selbstdual, insofern zwei Elemente $x, y \in X$ genau dann in der geordneten Menge (X, \leq) miteinander vergleichbar sind, wenn sie vergleichbar sind in der Umkehrordnung (X, \geq) .

Diese Dualität ist nicht nur eine nützliche Merkhilfe, sie spart uns auch eine Menge Beweisarbeit, insofern wir praktisch nur jede zweite Aussage über geordnete Mengen überhaupt beweisen müssen. Beispielsweise wurde in **Satz §5.2.24** nur bewiesen, dass jedes kleinste Element ein minimales Element ist, mit der Anmerkung, der Beweis für die duale Aussage über größte und maximale Elemente „ginge analog“. Tatsächlich muss hier gar kein zweiter Beweis mehr geführt werden: Denn indem bewiesen wurde, dass in *jeder* geordneten Menge (X, \leq) ein kleinstes Element auch ein minimales Element ist, gilt diese Aussage dann ja insbesondere auch für die geordnete Menge (X, \geq) . Aber die kleinsten und minimalen Elemente in (X, \geq) sind genau die größten und maximalen Elemente in (X, \leq) .

§5.3 Äquivalenzrelationen

§5.3.1 **Bemerkung** (*Philosophie der Äquivalenzrelationen*). Warum ist das Gleichheitszeichen $=$ eigentlich nicht überflüssig? Wir verwenden es, um auszudrücken, dass zwei Objekte identisch sind – aber in diesem Fall ergibt es ja von vornherein überhaupt keinen Sinn, von *zwei* Objekten zu sprechen. Beispielsweise ist die Gleichung

$$12 \cdot 18 = 6 \cdot 36$$

gleichbedeutend zu $216 = 216$, also einer Information, die eigentlich nicht der Rede wert ist.

Der springende Punkt ist hier das Vorliegen zweier verschiedener Abstraktionsebenen. Einerseits haben wir es beim Rechnen mit Zeichenketten wie „ $12 \cdot 18$ “ oder „ $6 \cdot 36$ “ zu tun. Auf einer abstrakteren Ebene interessieren wir uns für die Zahlen, die durch die Zeichenketten *repräsentiert* werden. So sind etwa „ 216 “¹⁴ und „ $12 \cdot 18$ “ zwei *verschiedene* Zeichenketten, die dennoch *dieselbe* Zahl repräsentieren, und dies zu überprüfen erfordert Rechenaufwand. Es findet ein gedanklicher Abstraktionsprozess statt: zwei Objekte, die auf einer gewissen Ebene noch voneinander verschieden sind, fassen wir auf einer abstrakteren Ebene als identisch auf. Wir schwächen den Gleichheitsbegriff ab. Indem wir die Gleichung „ $12 \cdot 18 = 6 \cdot 36$ “ als nicht-selbstverständliche Aussage hinstellen, machen wir auf diesen Abstraktionsprozess aufmerksam.

Formalisiert werden kann dieser Prozess durch Äquivalenzrelationen. Es handelt sich dabei um alternative Gleichheitsbegriffe, die schwächer als die herkömmliche, strikte Gleichheit sind, und dadurch eine „Gleichheit auf einer abstrakteren Ebene“ darstellen.

Bisher wurden allgemeine Relationen mit dem Buchstaben R und allgemeine Ordnungsrelationen mit dem Zeichen \leq notiert. Für allgemeine Äquivalenzrelationen nutze ich die Tilde \sim .

¹⁴Beachte, dass auch der Ausdruck „ 216 “ noch eine Abkürzung ist für „ $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ “.

§5.3.2 **Definition (Äquivalenzrelation).** Sei X eine Menge. Eine Relation \sim auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In Formeln:

$$\begin{array}{lll} (\text{ÄR1}) & \forall x \in X : & x \sim x \quad (\text{Reflexivität}) \\ (\text{ÄR2}) & \forall x, y \in X : & x \sim y \implies y \sim x \quad (\text{Symmetrie}) \\ (\text{ÄR3}) & \forall x, y, z \in X : & (x \sim y \text{ und } y \sim z) \implies x \sim z \quad (\text{Transitivität}) \end{array}$$

§5.3.3 Beispiel.

(1) (Gleichheit) Auf jeder beliebigen Menge X ist die Gleichheitsrelation $=$ eine Äquivalenzrelation. Denn für beliebige $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{array}{l} x = x \\ x = y \implies y = x \\ (x = y \text{ und } y = z) \implies x = z \end{array}$$

(2) (Äquivalenz von Aussagen) Sei \mathcal{A} die Menge aller mathematischen Aussagen. Dann ist die Relation

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es lässt sich beweisen, dass } A \leftrightarrow B \quad A, B \in \mathcal{A}$$

eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{A} . Die Reflexivität wurde in **Satz §2.3.13** bewiesen, die Symmetrie ergibt sich aus **Satz §2.3.15** und die Transitivität folgt aus **Satz §2.3.8**.

(3) (Kongruenz modulo n) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die durch

$$a \equiv b \pmod{n} \quad :\Leftrightarrow \quad a - b \in n\mathbb{Z} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

(lies: „ a ist kongruent zu b modulo n “)

definierte Relation auf \mathbb{Z} heißt **Kongruenz modulo n** . Per Definition sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ genau dann kongruent modulo n , wenn ihre Differenz ein Vielfaches von n ist. Beispielsweise gilt:

$$\begin{array}{lll} 16 \equiv 1 & \pmod{5} & 4 \equiv 10 \pmod{3} \\ -1 \equiv 1 & \pmod{2} & 5 \equiv -4 \pmod{3} \\ 11 \not\equiv 7 & \pmod{5} & 6 \not\equiv 9 \pmod{4} \\ 85983 \equiv 14238 & \pmod{1} & 1 \equiv 0 \pmod{1} \\ 4 \equiv 4 & \pmod{0} & 4 \not\equiv 2 \pmod{0} \end{array}$$

Die Kongruenz modulo n ist eine Äquivalenzrelation.

(4) Auf jeder beliebigen Menge ist die Allrelation eine Äquivalenzrelation.

§5.3.4 **Bemerkung (Gemeinsames Merkmal).** Seien X, Y zwei Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Dann ist die Relation

$$a \sim_f b \quad :\Leftrightarrow \quad f(a) = f(b) \quad a, b \in X$$

eine Äquivalenzrelation auf X .¹⁵ Stellen wir uns f als eine Abbildung vor, die den Elementen von X gewisse „Merkmale“ zuordnet, so formalisiert die Relation \sim_f das Teilen solcher gemeinsamen Merkmale.

¹⁵Es handelt sich genau um den Pullback der Gleichheitsrelation entlang f im Sinne von **Bemerkung §5.1.14**.

§5.3.5 **Beweis.** Alle Eigenschaften ergeben sich daraus, dass „ $=$ “ eine Äquivalenzrelation auf Y ist:

(Reflexivität): Für jedes $a \in X$ ist $f(a) = f(a)$, also $a \sim_f a$.

(Symmetrie): Sind $a, b \in X$ mit $a \sim_f b$, also $f(a) = f(b)$, so ist auch $f(b) = f(a)$, also $b \sim_f a$.

(Transitivität): Seien $a, b, c \in X$ mit $a \sim_f b \sim_f c$, d.h. $f(a) = f(b) = f(c)$. Es folgt $f(a) = f(c)$, sodass $a \sim_f c$. ■

§5.3.6 **Beispiel.**

(1) (Wohngemeinschaften) Sei M die Menge aller Menschen, die genau eine Wohnung haben. Wir haben eine Abbildung $M \rightarrow \{\text{Wohnungen}\}$, die jeder Person aus M ihre Wohnung zuordnet. Nach **Bemerkung** §5.3.4 ist also durch „lebt in derselben Wohnung wie“ eine Äquivalenzrelation auf M gegeben. Im Detail heißt das:

(Reflexivität): Jede Person wohnt mit sich selbst zusammen (so komisch das klingt).

(Symmetrie): Wenn eine Person A mit einer Person B zusammenwohnt, so wohnt B auch mit A zusammen.

(Transitivität): Wenn $A, B, C \in M$ drei Leute sind, bei denen A mit B und B mit C zusammenwohnt, so wohnt auch A mit C zusammen.

(2) (Fußballvereine) Sei F die Menge aller Fußballspieler in der Bundesliga. Wir haben eine Abbildung $F \rightarrow \{\text{Fußballvereine}\}$, die jedem Spieler seinen Verein zuordnet. Nach **Bemerkung** §5.3.4 ist also durch „spielt im selben Verein wie“ eine Äquivalenzrelation auf F gegeben.

(3) Eine Konsequenz von **Satz** §5.3.14 ist, dass sich jede Äquivalenzrelation über die Konstruktion aus **Bemerkung** §5.3.4 realisieren lässt. Insofern jede Äquivalenzrelation ein Pullback einer Gleichheitsrelation ist, ist $=$ die „universelle Äquivalenzrelation“.

§5.3.7 **Definition (Äquivalenzklasse).** Seien X eine Menge, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Die Menge aller „zu x äquivalenten“ Elemente

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

heißt die **Äquivalenzklasse**¹⁶ von x . Vor allem in der Algebra wird die Äquivalenzklasse auch mit einem Oberstrich notiert:

$$\bar{x} := [x]$$

Allgemein heißt eine Teilmenge $K \subseteq X$ eine **Äquivalenzklasse** (hinsichtlich \sim), wenn es ein Element $a \in X$ gibt, für das $K = [a]$ ist. Ein solches Element a heißt ein **Vertreter** oder auch ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse K .

§5.3.8 **Beispiel.**

(1) Sei M die Menge aller Menschen, die genau eine Wohnung haben. Hinsichtlich der Äquivalenzrelation „wohnt in derselben Wohnung wie“ besteht die Äquivalenzklasse einer Person $x \in M$ genau aus denjenigen Personen aus M , mit denen x zusammenwohnt (einschließlich x selbst).

¹⁶Vielleicht ist dir bekannt, dass in der axiomatischen Mengenlehre zwischen „Mengen“ und „Klassen“ unterschieden wird. Die Terminologie „Äquivalenzklasse“ hat damit allerdings nichts zu tun und ist schlicht historisch erwachsen.

- (2) Sei F die Menge aller Fußballspieler in der Bundesliga. Hinsichtlich der Relation „spielt im selben Verein wie“ ist die Äquivalenzklasse eines Spielers f genau die Menge seiner Mitspieler (einschließlich seiner selbst).
- (3) Sei \mathcal{A} die Menge aller Aussagen. Hinsichtlich der Äquivalenzrelation aus **Beispiel** §5.3.3 besteht die Äquivalenzklasse einer Aussage A genau aus denjenigen Aussagen B , für die sich beweisen lässt, dass $A \leftrightarrow B$.

§5.3.9 **Definition** (* *Vertretersystem*). Seien X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Ein **Vertretersystem** (oder auch: **Repräsentantensystem**) für \sim ist eine Teilmenge $V \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

§5.3.10 **Beispiel** (*).

- (1) Sei F die Menge der Fußballspieler in der Bundesliga. Hinsichtlich der Äquivalenzrelation „spielt im selben Verein wie“ bildet die Menge aller Mannschaftskapitäne der Bundesligavereine ein Vertretersystem, da jede Fußballmannschaft genau einen Mannschaftskapitän hat. Weitere Vertretersysteme erhielte man beispielsweise, indem man aus jeder Mannschaft den ältesten Spieler oder den Stammtorwart auswählt.
- (2) Nach **Bemerkung** §5.3.4 ist auf \mathbb{Z} durch die Relation

$$m \sim n \quad :\Leftrightarrow \quad |m| = |n| \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Ein „kanonisches“ Vertretersystem ist gegeben durch die Menge \mathbb{N}_0 , denn jede ganze Zahl teilt sich ihren Betrag mit genau einer natürlichen Zahl. Ebenso ist aber auch die Menge der nichtpositiven Zahlen $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ ein Vertretersystem.

- (3) Sei $n \in \mathbb{N}$. Hinsichtlich der Kongruenz modulo n bilden die Zahlen $0, 1, \dots, n-1$ ein „kanonisches“ Vertretersystem, da jede ganze Zahl zu genau einer dieser Zahlen kongruent modulo n ist. Ebenso bilden aber $1, \dots, n$ oder auch $n, n+1, \dots, 2n-1$ ein Vertretersystem.
- (4) Nicht zu jeder Äquivalenzrelation muss es ein kanonisches Vertretersystem geben. Beispielsweise ist durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} gegeben, für die kein kanonisches Vertretersystem vorliegt. Die Existenz eines Vertretersystems, also der Möglichkeit, aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element „auszuwählen“, wird axiomatisch garantiert durch das *Auswahlaxiom*, siehe dazu **Vorschau** §3.6.13. Bei den Vertretersystemen zu obiger Äquivalenzrelation handelt es sich um *intangibles*.

Die Faktormenge zu einer Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen sind vergrößerte Gleichheitsbegriffe. In diesem Abschnitt wird die Methode vorgestellt, „äquivalente“ Elemente künstlich *gleich* zu machen.

§5.3.11 **Definition** (*Faktormenge zu einer Äquivalenzrelation*). Seien X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich \sim heißt die **Faktormenge** (oder auch: **Quotientenmenge**) von X modulo \sim und wird mit X/\sim notiert:

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\} \quad (\text{lies: „}X \text{ modulo } \sim\text{“})$$

Die Abbildung $X \rightarrow X/\sim$, die jedem Element von X seine Äquivalenzklasse zuordnet, heißt die **(kanonische) Projektion** von X auf X/\sim und wird oft notiert mit dem griechischen Buchstaben π (pi) und einem Pfeil mit Doppelspitze:

$$\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$$

§5.3.12 Bemerkung.

- Verwechsle den slash / zur Notation von Faktormengen nicht mit dem backslash \ zur Notation von Differenzmengen (Definition §3.6.1).
- Da per Definition jede Äquivalenzklasse von der Gestalt $[x]$ für ein (in der Regel nicht eindeutig bestimmtes) $x \in X$ ist, ist die kanonische Projektion eine surjektive Abbildung.

§5.3.13 Beispiel.

- (1) Sei F die Menge aller Fußballspieler in der Bundesliga. Die Elemente der Faktormenge F/\sim hinsichtlich der Äquivalenzrelation „spielt im selben Verein wie“ sind genau die Vereinskader der einzelnen Bundesligisten. Die kanonische Projektion bildet jeden Spieler $f \in F$ auf die Menge seiner Mitspieler $\{g \in F \mid g \text{ spielt im gleichen Verein wie } f\}$ ab.
- (2) Sei M die Menge aller Menschen mit genau einer Wohnung. Die Elemente der Faktormenge M/\sim hinsichtlich der Äquivalenzrelation „wohnt zusammen mit“ sind genau die Wohngemeinschaften, d.h. die Mengen von Leuten, die sich eine gemeinsame Wohnung teilen. Die kanonische Projektion bildet eine Person ab auf die Menge aller ihrer Mitbewohner (einschließlich ihrer selbst).
- (3) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Faktormenge von \mathbb{Z} hinsichtlich Kongruenz modulo n wird notiert mit

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad (\text{lies: „}\mathbb{Z} \text{ modulo } n\mathbb{Z}\text{“})$$

Mithilfe des **Satzes über die Division mit Rest** lässt sich beweisen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau n -viele Elemente enthält, nämlich

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

In der Algebra wird auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Addition und eine Multiplikation erklärt, mit denen sich ähnlich „rechnen“ lässt wie mit gewöhnlichen Zahlen. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Beispiel für einen „Faktorring“, d.h. es liegt nicht nur ein „Faktorobjekt in der Kategorie der Mengen“ vor, sondern sogar ein „Faktorobjekt in der Kategorie der Ringe“, vgl. **Vorschau** §4.3.5.

§5.3.14 **Satz (Gleichheit in der Faktormenge).** Seien X eine Menge, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) Es ist $[x] = [y]$.

(ii) Es gilt $x \sim y$.

§5.3.15 **Beweis.** (i)→(ii): Es gelte (i). Weil \sim reflexiv ist, ist $x \in [x]$, wegen (i) also auch $x \in [y]$. Per Definition von $[y]$ heißt das gerade, dass $x \sim y$.

(ii)→(i): Es gelte $x \sim y$. Da \sim eine symmetrische Relation ist, gilt dann auch $y \sim x$. Ich zeige nun die Gleichheit von Mengen $[x] = [y]$ mit der Technik aus **Bemerkung** §3.2.8.

„ \subseteq “: Sei $z \in [x]$ beliebig. Dann ist $z \sim x$ und zusammen mit $x \sim y$ folgt aus der Transitivität, dass $z \sim y$. Also ist $z \in [y]$.

„ \supseteq “: Sei $z \in [y]$ beliebig. Dann ist $z \sim y$ und zusammen mit $y \sim x$ folgt aus der Transitivität, dass $z \sim x$. Also ist $z \in [x]$. ■

§5.3.16 **Bemerkung (Intuition für die Faktormenge)**. Der mengentheoretisch mühsame Beweis dieses Satzes verschleiert seine eigentliche Bedeutung, die mit Mengen eigentlich gar nichts mehr zu tun hat. Er besagt, dass „Äquivalenz“ auf dem Niveau der Menge X , also $x \sim y$, zu *Gleichheit* auf dem Niveau der Faktormenge X/\sim , also $[x] = [y]$, wird.

Damit wurde der Abstraktionsprozess aus **Bemerkung §5.3.1** formalisiert. Zwei Elemente $x, y \in X$ sind genau dann „gleich in X/\sim “, wenn sie in der weniger abstrakten „Welt von X “ in der Relation \sim zueinander stehen (aber nicht unbedingt auch schon in der Welt von X gleich sind).

Der durch die Projektion $X \rightarrow X/\sim$ vermittelte Übergang von X zur Faktormenge X/\sim überführt den „abgeschwächten Gleichheitsbegriff \sim “ zu einer Gleichheit $=$ im strikten Sinn. Dies ist der Sinn der Faktormenge: eine „Welt“ zu schaffen, in der \sim -äquivalente Elemente als identisch behandelt werden können.

Die mengentheoretische Modellierung als Menge von Äquivalenzklassen ist dabei nebensächlich. In der Algebra werden *universelle Eigenschaften* beschrieben, die eine tiefgreifende Verallgemeinerung des Konzepts „Faktormenge“ erlauben. Für Algebraiker ist die konkrete Gestalt der Elemente von X/\sim völlig egal und oftmals bezeichnen sie Strukturen als „Faktormengen“, die es im Sinne von **Definition §5.3.11** gar nicht sind, – in einem allgemeineren, kategorientheoretischen Sinne aber schon.

§5.3.17 **Beispiel (*)**.

- (1) (Freges Konstruktion der natürlichen Zahlen) Es bereitet uns keine Schwierigkeiten, eine kleine Menge von Gegenständen abzuzählen und etwa zu sagen: „Es liegen sieben Stück vor“. Auf die Frage, was denn nun die Zahl Sieben eigentlich ist, habe ich jedoch selbst nach sechs Jahren Mathestudium keine definitive Antwort erhalten (die eigentliche Lektion ist, dass diese Frage mathematisch unwichtig ist). In seiner Schrift *Die Grundlagen der Arithmetik* definierte Frege¹⁷ natürliche Zahlen im folgenden Sinne:

Sei V die Gesamtheit aller Mengen von Gegenständen, deren Anzahl wir mit einer natürlichen Zahl bezeichnen. Auf V ist dann durch

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad A, B \text{ enthalten gleichviele Elemente} \quad A, B \in V$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Nach **Satz §5.3.14** gilt für Mengen $A, B \in V$ genau dann $[A] = [B]$, wenn A, B gleichviele Elemente enthalten. Die Anzahl der Elemente von $A \in V$ sei nun definiert als die Äquivalenzklasse $[A] \in V/\sim$. Ist beispielsweise $A \in V$ eine Menge mit, sagen wir, sieben Elementen, so ist *die Zahl Sieben* definiert als $[A]$. Die Faktormenge V/\sim können wir uns als „Menge aller natürlichen Zahlen“ vorstellen, in dieser Sichtweise ordnet die Projektion $V \rightarrow V/\sim$ jeder Menge $A \in V$ die Anzahl ihrer Elemente zu. Je nachdem, welche Mengen alle zu V gehören und wie genau „enthalten gleichviele Elemente“S definiert ist, lassen sich auf diese Weise auch „unendliche Anzahlen“, die *transfiniten Kardinalzahlen*, definieren.

- (2) (Lindenbaum-Algebra¹⁸) Sei \mathcal{A} die Menge aller Aussagen und \mathcal{L} die Faktormenge modulo die Äquivalenzrelation aus **Beispiel §5.3.3**. \mathcal{L} trägt in natürlicher Weise die Struktur einer sogenannten *Boolschen Algebra*¹⁹, man spricht von der *Lindenbaum-Algebra*. Für eine Aussage A kann die Äquivalenzklasse $[A]$ als der „Wahrheitswert“ von A interpretiert werden. In dieser Sichtweise

¹⁷ Gottlob Frege (1848-1925)

¹⁸ Adolf Lindenbaum (1904-1941)

¹⁹ vgl. **Vorschau §1.4.1**

ordnet die kanonische Projektion $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ jeder Aussage ihren Wahrheitswert zu. Sind A, B zwei Aussagen, so gilt $A \leftrightarrow B$ nach **Satz §5.3.14** genau dann wenn $[A] = [B]$ in \mathcal{L} , also wenn A und B denselben Wahrheitswert haben. Die Lindenbaum-Algebra kann als Menge aller mathematischen Wahrheitswerte angesehen werden. Aufgrund der Existenz unentscheidbarer Aussagen²⁰ besteht \mathcal{L} nicht aus genau zwei Elementen, d.h. die klassischen zweiwertigen Interpretationen aus **Definition §1.4.2** sind für die Mathematik eigentlich inadäquat.

§5.3.18 **Vorschau** (**Dualität zwischen Teilmengen und Faktormengen*). Es gibt eine weitreichende Dualität zwischen Teilmengen und ihren Inklusionsabbildungen (siehe **Definition §4.3.6**) und Faktormengen und ihren Projektionsabbildungen, und allgemein zwischen **Unterbjekten** und **Faktorobjekten**. Bereits in der LA1 wirst du damit in Kontakt kommen, wenn Unterräume und Faktorräume von Vektorräumen untersucht werden.

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, so ist $\text{im}(f)$ eine Teilmenge von Y . Das dazu „duale“ Objekt ist das **Kobild** von f und ist definiert als die Faktormenge X/\sim_f modulo die Äquivalenzrelation aus **Bemerkung §5.3.4**. Notation: $\text{coim}(f)$.

Es lässt sich ein regelrechtes Wörterbuch aufstellen, das Eigenschaften von Teilmengen in „duale“ Eigenschaften von Faktormengen übersetzt:

Teilmengen	Faktormengen
Die Inklusion $U \hookrightarrow X$ ist injektiv.	Die Projektion $X \twoheadrightarrow X/\sim$ ist surjektiv.
Genau dann ist $X \xrightarrow{f} Y$ surjektiv, wenn $\text{im}(f) = Y$.	Genau dann ist $X \xrightarrow{f} Y$ injektiv, wenn $\text{coim}(f) = X$.
Durch Einschränken auf $\text{im}(f)$ wird f „künstlich surjektiv“. ²¹	Durch Faktorisieren über $\text{coim}(f)$ wird f „künstlich injektiv“.
	etc.

Der zentrale Satz, der Kobild und Bild miteinander in Beziehung setzt, ist der *Erste Isomorphiesatz* (manchmal auch *Homomorphiesatz* genannt), der für viele Kategorien besagt, dass Kobild und Bild einander *isomorph*, d.h. von „gleicher Gestalt“, sind. Instanzen des allgemeinen Satzes werden dir für die Kategorien der Vektorräume, Mengen und möglicherweise auch Gruppen vielleicht schon in der LA1 begegnen.

* **Partitionen**

Zum Schluss dieses Abschnitts über Äquivalenzrelationen soll darauf eingegangen werden, inwiefern Äquivalenzrelationen gewissen „Zerlegungen“ einer Menge entsprechen. Der Begriff der Partition ist für manche Anfänger leichter begreifbar als der Begriff der Äquivalenzrelation, zu ihm aber im Wesentlichen äquivalent.

§5.3.19 **Definition (Partition)**. Sei X eine beliebige Menge. Ein System von Teilmengen \mathcal{P} von X heißt **Partition von X** , wenn gilt:

- (P1) Jedes Element von \mathcal{P} ist eine nichtleere Teilmenge von X .
- (P2) Es ist $X = \bigcup \mathcal{P}$, d.h. X ist die disjunkte Vereinigung der Elemente von \mathcal{P} .

²⁰vgl. **Vorschau §2.8.7**
²¹siehe **Vorschau §4.6.10**

Die zweite Aussage kann auch so formuliert werden: für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$.

§5.3.20 **Satz.** Seien X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist die Faktormenge X/\sim eine Partition von X .

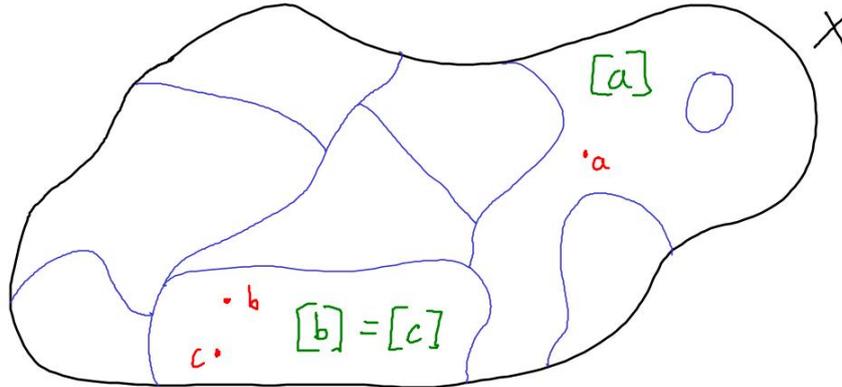


Abbildung 5.1: Die Menge X zerfällt in disjunkte Äquivalenzklassen.

§5.3.21 **Beweis.** (P1) Per Definition ist jede Äquivalenzklasse eine Teilmenge von X . Wegen der Reflexivität gilt für jedes $x \in X$, dass $x \in [x]$, sodass jede Äquivalenzklasse eine nichtleere Menge ist.

(P2) Sei $\mathcal{P} := X/\sim$. Wegen $x \in [x]$ für jedes $x \in X$ ist $X = \bigcup \mathcal{P}$, und es bleibt zu zeigen, dass die Elemente von \mathcal{P} paarweise disjunkt sind. Dazu seien $x, y \in X$ beliebig mit $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, d.h. es gebe ein Element $a \in [x] \cap [y]$. Dann ist $a \sim x$ und $a \sim y$. Wegen der Symmetrie gilt auch $x \sim a$, und mit der Transitivität folgt aus $x \sim a$ und $a \sim y$, dass $x \sim y$ gilt. Nach Satz §5.3.14 ist dann $[x] = [y]$. ■

§5.3.22 **Bemerkung.** Satz §5.3.20 zeigt, dass jede Äquivalenzrelation auf X eine Partition von X induziert. Wir haben also eine Abbildung

$$\{\text{Äquivalenzrelationen auf } X\} \rightarrow \{\text{Partitionen von } X\}, \sim \mapsto X/\sim$$

konstruiert. Es lässt sich zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist (versuch es mal!). Die Äquivalenzrelationen auf X stehen also in einer Eins-zu-Eins-Beziehung zu den Partitionen von X , beide Konzepte sind „im Wesentlichen gleichwertig“.

Dennoch hat keines der beiden Konzepte Vorrang vor dem Anderen. In den Beispielen mit den Fußballmannschaften und Wohngemeinschaften spielt sicherlich die Partition die „primäre“ Rolle, die aus ihr abgeleiteten Äquivalenzrelationen „wohnt in derselben Wohnung wie“, „spielt im selben Verein wie“ sind hier eher sekundär. In den Beispielen aus Beispiel §5.3.3 hat dagegen eher die Äquivalenzrelation Vorrang.

§5.4 Aufgabenvorschläge

§5.4.1 **Aufgabe (Eigenschaften von Relationen (L)).** Untersucht die folgenden Relationen darauf, ob sie reflexiv, transitiv, symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen, welche Äquivalenzrelationen? Sofern eine Ordnungsrelation vorliegt, versucht, sie mit einem Diagramm zu veranschaulichen.

a) Es bezeichne S die Menge aller Städte auf der Erde. Betrachtet darauf die Relation

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind höchstens 100km voneinander entfernt} \quad A, B \in S$$

b) Auf der Menge \mathbb{R} die Ungleichheitsrelation \neq .

c) Auf der Menge \mathbb{R} die „strikt kleiner“-Relation $<$.

d) Auf der Menge \mathbb{N} die Teilbarkeitsrelation:

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : k \cdot m = n \quad m, n \in \mathbb{N}$$

e) Sei X eine beliebige Menge. Betrachtet für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ die Relation:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : a_n = b_n$$

Ich sage auch: Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ „stimmen überein für hinreichend große n “.²²

§5.4.2 **Aufgabe (Schranken (L)).** In dieser Aufgabe geht es um Teilmengen geordneter Mengen. Wir betrachten die geordneten Mengen (\mathbb{Q}, \leq) und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und deren folgende Teilmengen:

a) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 4\} \subseteq \mathbb{Q}$

b) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subseteq \mathbb{Q}$

c) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

d) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ enthält nur endlich viele Elemente}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$

Untersucht jede Teilmenge darauf, ob sie innerhalb der Obermenge nach oben oder unten beschränkt ist, kleinste oder größte, minimale oder maximale Elemente enthält und ob sie innerhalb der Obermenge ein Infimum oder ein Supremum besitzt.

§5.4.3 **Aufgabe (Zerlegung der Ebene in Äquivalenzklassen).** Betrachtet folgende Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_1(x, y) = y \quad f_2(x, y) = x + y \quad f_3(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_4(x, y) = xy \quad f_5(x, y) = \lfloor x + y \rfloor \quad f_6(x, y) = \lfloor x^2 + y^2 \rfloor$$

a) Für jedes $i \in \{1, \dots, 6\}$ zeichnet die Faser $f_i^{-1}(3)$ in die Ebene \mathbb{R}^2 ein.

b) Nach **Bemerkung** §5.3.4 ist für jedes $i \in \{1, \dots, 6\}$ durch

$$p \sim_i q \quad :\Leftrightarrow \quad f_i(p) = f_i(q) \quad p, q \in \mathbb{R}^2$$

eine Äquivalenzrelation auf dem \mathbb{R}^2 gegeben. Visualisiert die Äquivalenzklassen jeweils mit einer Zeichnung.

²²vgl. Definition §7.3.12

Kapitel 6

Verknüpfungen

Der Begriff der Verknüpfung verallgemeinert die aus der Schule bekannten Rechenoperationen und dieser Vortrag könnte genauso gut „Rechnen“ betitelt sein. Es werden grundlegende Eigenschaften von Verknüpfungen untersucht und ein paar Konsequenzen daraus abgeleitet.

§6.1 Allgemeines

§6.1.1 **Definition (Verknüpfung).** Sei X eine beliebige Menge. Eine (zweistellige) **Verknüpfung auf X** ist eine Abbildung $X \times X \rightarrow X$, d.h. eine Abbildung, die je zwei Elementen von X wiederum ein Element von X zuordnet. Eine zweistellige Verknüpfung wird in der Regel mit einem „Verknüpfungszeichen“ notiert: ist der Name der Verknüpfungsabbildung etwa „ $*$ “, so schreibt man

$$x * y \quad \text{anstelle von} \quad * (x, y)$$

für den Funktionswert des Paares (x, y) unter der Abbildung $*$.

§6.1.2 **Bemerkung (* Verallgemeinerungen).** Prinzipiell lassen sich auch dreistellige und höherstellige Verknüpfungen definieren. Auch können Verknüpfungen zwischen verschiedenen Mengen existieren, wie es in der LA1 etwa bei der *skalaren Multiplikation* eines Vektorraums der Fall ist. In diesem Kapitel sollen mit „Verknüpfungen“ aber ausschließlich (innere) zweistellige Verknüpfungen gemeint sein, wie sie soeben definiert wurden.

§6.1.3 **Beispiel (Grundrechenarten).** Es gilt:

- (1) Auf \mathbb{R} ist durch die Addition $x, y \mapsto x + y$ eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Da die Summe zweier rationaler Zahlen ebenfalls rational ist, liefert „ $+$ “ auch eine Verknüpfung auf der Menge \mathbb{Q} . Ebenso ist auch auf \mathbb{N} und \mathbb{Z} durch die Addition „ $+$ “ jeweils eine Verknüpfung gegeben.
- (2) Auf den Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist durch die Multiplikation $x, y \mapsto x \cdot y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben.
- (3) Auf den Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist durch die Subtraktion $x, y \mapsto x - y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Für \mathbb{N} ergäbe der Ausdruck

$$\text{„}\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x - y\text{“}$$

allerdings keinen Sinn, da z.B. $2 - 3$ gar kein Element von \mathbb{N} wäre. Auf \mathbb{N} ist die Subtraktion also *keine* zweistellige Verknüpfung. Zwar lassen sich für gewisse Zahlenpaare durchaus Differenzen in \mathbb{N} bilden (z.B. $3 - 2$); dass $-$ eine Verknüpfung auf \mathbb{N} wäre, scheitert aber daran, dass eben nicht *jedes* Paar natürlicher Zahlen eine Differenz in \mathbb{N} besitzt.¹

¹Als nächstbesten Ersatz für die Subtraktion hat man auf \mathbb{N} die „**Monus**“-Verknüpfung.

- (4) Auf den Mengen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist durch die Division $x, y \mapsto x : y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Beachte, dass die Null ausgelassen werden muss, weil bspw. nicht „ $1 : 0$ “ gerechnet werden kann. Zwar könnte man $1 : 0 = \infty$ setzen, aber ∞ wäre kein Element von \mathbb{Q} , \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} , sodass dadurch nachwievor keine Verknüpfung auf \mathbb{Q} , \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} zustandekäme.

§6.1.4 **Beispiel** (*Operationen mit Mengen*). Sei M eine beliebige Menge. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ haben wir beispielsweise folgende Verknüpfungen:

$$\cap : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \mapsto A \cap B$$

$$\cup : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \mapsto A \cup B$$

$$\setminus : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \mapsto A \setminus B$$

Denn der Durchschnitt / die Vereinigung / die Differenzmenge zweier Teilmengen von M ist ebenfalls eine Teilmenge von M .

§6.1.5 **Beispiel** (* *Kleineres und Größeres zweier Elemente*). Auf \mathbb{R} gibt es die beiden Verknüpfungen

$$\min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \min\{x, y\}$$

$$\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$$

die ein Zahlenpaar jeweils auf die kleinere bzw. die größere der beiden Zahlen abbildet. Eine Verallgemeinerung sowohl dieses Beispiels als auch des Beispiels mit \cap und \cup stellen **Verbände** dar.

§6.1.6 **Beispiel** (*Verketten von Abbildungen*). Sei M eine beliebige Menge. Dann ist auf der Menge $\text{Abb}(M, M)$ der Selbstabbildungen von M eine Verknüpfung gegeben durch die Verkettung von Abbildungen $g, f \mapsto g \circ f$.²

§6.1.7 **Bemerkung** (*). Für verschiedene Mengen A, B, C ist die Abbildung

$$\text{Abb}(B, C) \times \text{Abb}(A, B) \rightarrow \text{Abb}(A, C), (g, f) \mapsto g \circ f$$

jedoch keine Verknüpfung im Sinne von **Definition** §6.1.1, da die involvierten Mengen $\text{Abb}(B, C)$, $\text{Abb}(A, B)$ und $\text{Abb}(A, C)$ verschieden sind. Aus diesem Grund beschränke ich mich in **Beispiel** §6.1.6 auf Selbstabbildungen einer Menge M .

Nichtsdestotrotz besitzt auch das allgemeine Verketteten von Abbildungen die wichtige und häufig auftretende Struktur einer **Kategorie**, vgl. **Vorschau** §4.3.5. Mehr darüber wirst du spätestens in fortgeschrittenen Algebra-Vorlesungen erfahren.

§6.1.8 **Bemerkung**. Alle bisher beschriebenen Verknüpfungen besaßen ein spezifisches eigenes Verknüpfungssymbol und waren relativ übersichtlich aufzuschreiben. Allgemeine Verknüpfungen auf einer Menge X dürfen aber beliebig kompliziert sein. Es muss sich ja lediglich um *irgendeine* Abbildung $X \times X \rightarrow X$ handeln, die beliebig chaotisch sein darf und keinem Muster gehorchen braucht. Neben Addition und Multiplikation gibt es auf \mathbb{N} unendlich viele weitere Verknüpfungen, von denen die meisten wohl niemals von mathematischem Interesse sein werden.

§6.1.9 **Notation** (*Verknüpfungssymbole*). In diesem Text werde ich, wenn ich über eine „allgemeine zweistellige Verknüpfung“ schreibe, die Verknüpfung mit einem „*“ notieren. Die vorigen Beispiele zeigen, dass konkrete Verknüpfungen auch mit ganz anderen Zeichen wie etwa $+$, $-$, \cdot , $:$, \cap , \cup , usw. notiert werden. Andere Bücher und Vorlesungen verwenden auch andere Symbole, wie etwa „ \odot “ oder „ \circ “, um über „die allgemeine Verknüpfung“ zu sprechen.

²siehe **Definition** §4.2.1

§6.1.10 **Definition (Eingeschränkte Verknüpfung).** Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X . Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$** , wenn für alle $x, y \in U$ auch $x * y \in U$ ist. In diesem Fall ist durch

$$*|_U : U \times U \rightarrow U, (u, v) \mapsto u * v$$

eine Verknüpfung auf U definiert, die **Einschränkung von $*$ auf U** oder auch die **von X vererbte Verknüpfung**. Die eingeschränkte Verknüpfung $*|_U$ tut dasselbe wie $*$, aber mit dem Unterschied, dass sie nur noch auf Elemente von U angewandt wird.

§6.1.11 **Beispiel.**

- (1) Die Teilmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Die Verknüpfungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ stimmen überein mit den von \mathbb{R} geerbten Verknüpfungen. Ob ich zwei ganze Zahlen nun in \mathbb{Z} oder in \mathbb{R} multipliziere, macht keinen Unterschied. Die Verknüpfungen auf \mathbb{R} ergeben sich wiederum als Einschränkungen derjenigen von \mathbb{C} .
- (2) $\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ sind abgeschlossen unter Addition und Multiplikation, da Summen und Produkte nichtnegativer Zahlen ebenfalls nichtnegativ sind. Dagegen sind $\mathbb{Z}_{\leq 0}, \mathbb{Q}_{\leq 0}$ und $\mathbb{R}_{\leq 0}$ zwar abgeschlossen unter Addition, nicht jedoch unter Multiplikation, da Produkte negativer Zahlen ja positiv sind.

§6.1.12 **Bemerkung.** Beachte, dass sich Verknüpfungen, im Gegensatz zu Relationen (siehe [Definition §5.1.12](#)), nicht auf beliebige Teilmengen einschränken lassen, sondern nur auf solche, die abgeschlossen unter der Verknüpfung sind.³ Beispielsweise ist die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ nicht abgeschlossen unter Subtraktion, sodass sich, wie in [Beispiel §6.1.3](#) besprochen, die Subtraktion nicht von \mathbb{Z} auf \mathbb{N} einschränken lässt.

§6.1.13 **Vorschau (*opposite Verknüpfung).** Sei X eine Menge. Ganz ähnlich zu [Definition §5.1.7](#) lässt sich für eine Verknüpfung $*$ auf X die *opposite Verknüpfung* $*^{\text{op}}$ auf X definieren, wobei $x *^{\text{op}} y := y * x$ für alle $x, y \in X$. Weil dies für den Rest dieses Kapitels und die Vorlesungen im ersten Semester jedoch selten relevant ist, werde ich hier nicht weiter darauf eingehen. Nichtsdestotrotz werden opposite Verknüpfungen in der Algebra wichtig, indem sie eine ähnliche Dualität wie die aus [Bemerkung §5.2.34](#) ermöglichen und eine mächtige Verallgemeinerung besitzen in Gestalt des Dualitätsprinzips der Kategorientheorie.

§6.2 Assoziativ- und Kommutativgesetz

§6.2.1 **Definition.** Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X .

- Die Verknüpfung $*$ heißt **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das **Assoziativgesetz** gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

- Man sagt, zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**, wenn $x * y = y * x$.
- Die Verknüpfung $*$ heißt **kommutativ**, falls für alle $x, y \in X$ das **Kommutativgesetz** gilt:

$$x * y = y * x$$

Mit anderen Worten: wenn alle Elemente miteinander kommutieren.

³vgl. [Bemerkung §4.5.7](#)

§6.2.2 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) Auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind die Addition $+$ und die Multiplikation \cdot sowohl assoziativ als auch kommutativ. Denn für alle natürlichen/ganzen/rationalen/reellen/komplexen Zahlen x, y, z gilt bekanntlich

$$\begin{array}{ccc} (x + y) + z = x + (y + z) & \text{sowie} & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ x + y = y + x & & x \cdot y = y \cdot x \end{array}$$

- (2) Die Subtraktion auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist weder assoziativ noch kommutativ. Beispielsweise ist

$$\begin{array}{l} (3 - 2) - 1 \neq 3 - (2 - 1) \\ 3 - 2 \neq 2 - 3 \end{array}$$

- (3) Die Division auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist weder assoziativ noch kommutativ. Beispielsweise ist

$$\begin{array}{l} (2 : 3) : 2 \neq 2 : (3 : 2) \\ 2 : 3 \neq 3 : 2 \end{array}$$

- (4) Das Verketteten von Abbildungen ist eine assoziative Verknüpfung auf $\text{Abb}(M, M)$ (für irgendeine Menge M). Dies wurde in **Satz §4.2.4** bewiesen. Im Allgemeinen (nämlich sobald M mindestens zwei verschiedene Elemente enthält) ist sie jedoch nicht kommutativ (vgl. **Beispiel §4.2.3**).

§6.2.3 **Beweis.** Die Menge M enthalte mindestens zwei verschiedene Elemente $a, b \in M$. Seien $f_a, f_b \in \text{Abb}(M, M)$ die beiden konstanten Abbildungen, die alles auf a bzw. b schicken. Dann ist $f_a \circ f_b = f_a \neq f_b = f_b \circ f_a$. ■

- (5) Ist M eine beliebige Menge, so sind die beiden Verknüpfungen \cap und \cup auf $\mathcal{P}(M)$ sowohl assoziativ als auch kommutativ. Die Operation \setminus ist aber, sofern M nichtleer ist, weder assoziativ noch kommutativ.

§6.2.4 **Beispiel (* Rechnen mit Rundungsfehlern).** So gut wie alle Verknüpfungen in den ersten Semestern Mathematikstudium sind assoziativ. Ein für die Informatik wichtiges Beispiel für eine nicht-assoziative Verknüpfung ist die Multiplikation von Computern. Da ein Computer eine Gleitkommazahl nicht mit beliebig vielen Nachkommastellen speichern kann, muss er nach solchen Rechenschritten, die die Anzahl der Nachkommastellen übers Maximum erhöhen würde, die letzte verfügbare Nachkommastelle runden. Für ein vereinfachtes Beispiel betrachte die Menge

$$\frac{1}{10}\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x \in \mathbb{Z}\}$$

all derjenigen rationalen Zahlen, die höchstens eine Nachkommastelle im Dezimalsystem besitzen (Computer würden im Binärsystem rechnen und erheblich mehr Nachkommastellen einbeziehen). Auf dieser Menge ist folgendermaßen eine zweistellige Verknüpfung „*“ gegeben:

Für $a, b \in \frac{1}{10}\mathbb{Z}$ bilde zuerst das gewöhnliche Produkt rationaler Zahlen $a \cdot b \in \mathbb{Q}$. Runde dieses Produkt nun auf die erste Nachkommastelle. Diese gerundete Zahl sei $a * b$.

Es gilt dann beispielsweise:

$$1,5 * 0,5 = 0,8 \quad 0,1 * 0,1 = 0 \quad 2 * 3 = 6 \quad 1,5 * (-0,3) = -0,5$$

Diese „unge naive Multiplikation“ ist zwar kommutativ, aber nicht assoziativ, da beispielsweise:

$$\begin{array}{l} (0,1 * 0,1) * 10 = 0 * 10 = 0 \\ 0,1 * (0,1 * 10) = 0,1 * 1 = 0,1 \end{array}$$

§6.2.5 **Bemerkung** (*Die eigentliche Bedeutung des Assoziativgesetzes*). Sei X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Der Grund dafür, dass das Assoziativgesetz so eine wichtige Rolle spielt, ist, dass bei einer assoziativen Verknüpfung keine Klammern gesetzt werden müssen. Das Assoziativgesetz selbst

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad x, y, z \in X$$

besagt schonmal, dass bei solchen Termen, die nur drei Elemente involvieren, beide Klammerungen auf dasselbe Ergebnis hinauslaufen. Daher schreibt man einfach

$$x * y * z$$

Mit fortgeschrittenen Techniken lässt sich beweisen, dass bei assoziativen Verknüpfungen sogar in Termen mit beliebig vielen Elementen jede Art von Klammerung auf dasselbe Ergebnis hinausläuft. Beispielsweise gilt für $a, b, c, d, e \in X$:

$$\begin{aligned} (a * (b * c)) * (d * e) &= ((a * b) * c) * (d * e) && \text{(Assoziativität für } a, b \text{ und } c) \\ &= (((a * b) * c) * d) * e && \text{(Assoziativität für } (a * b) * c, d \text{ und } e) \\ &= ((a * b) * (c * d)) * e && \text{(Assoziativität für } a * b, c \text{ und } d) \\ &= \text{usw.} \end{aligned}$$

Daher können bei assoziativen Verknüpfungen ganz allgemein überall die Klammern weggelassen werden. Hier schreibe man schlicht

$$a * b * c * d * e$$

Aus der Schule bist du es ja auch gewohnt, einfach

$$1 + 3 + 2 + 4 \quad \text{anstelle von} \quad (1 + 3) + (2 + 4) \text{ oder } ((1 + 3) + 2) + 4$$

zu schreiben und daran ändert sich auch an der Uni nichts. Sind beispielsweise A, B, C, D vier Mengen, so schreibt man schlicht

$$A \cup B \cup C \cup D$$

für deren Vereinigung, was unproblematisch ist, da \cup eine assoziative Verknüpfung ist.

Sind $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ drei Abbildungen, so schreibt man

$$h \circ g \circ f$$

für deren Verkettung, wobei auch hier wegen der Assoziativität keine Klammern gesetzt werden müssen.⁴

§6.2.6 **Bemerkung** (** Rechnen mit Aussagen modulo Äquivalenz*). Sei \mathcal{A} die Menge aller mathematischen Aussagen und \mathcal{L} die Lindenbaum-Algebra aus [Beispiel §5.3.17](#). Die Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ liefern jeweils Verknüpfungen auf \mathcal{A} . Auf dieser syntaktischen Seite sind \wedge und \vee *nicht* assoziativ. Sie können jedoch künstlich assoziativ gemacht werden per Übergang zur Lindenbaum-Algebra \mathcal{L} . Denn für Aussagen $A, B, C \in \mathcal{A}$ gelten die Äquivalenzen

$$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \quad \text{und} \quad (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

und in \mathcal{L} werden alle Äquivalenzen zu Gleichheiten, weil es sich per Definition genau um die Faktormenge modulo aussagenlogische Äquivalenz handelt. Auf \mathcal{L} induzieren \wedge und \vee assoziative Verknüpfungen, sodass man keine Klammern setzen braucht, wenn man lediglich modulo aussagenlogische Äquivalenz, also in \mathcal{L} , arbeitet.

⁴vgl. [Bemerkung §4.2.6](#)

§6.2.7 **Satz** (** Stabilität unter Einschränkung*). Seien X eine Menge, $*$ eine Verknüpfung auf X und $U \subseteq X$ eine Teilmenge, die abgeschlossen unter der Verknüpfung ist. Ist dann $*$ eine assoziative oder kommutative Verknüpfung, so ist es auch ihre Einschränkung $*|_U$ auf U .

§6.2.8 **Beweis**. Bei Assoziativgesetz und Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z) && \text{für alle } x, y, z \in X \\ x * y &= y * x && \text{für alle } x, y \in X \end{aligned}$$

handelt es sich jeweils um Allaussagen, die für alle Elemente von X gelten. Damit gelten sie dann erst recht auch für alle Elemente der Teilmenge U . ■

§6.3 Monoide

§6.3.1 **Definition** (*Neutrales Element*). Seien X eine Menge und $*$ eine zweistellige Verknüpfung auf X . Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales Element**, falls für alle $x \in X$ die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} e * x &= x && (e \text{ ist linksneutral}) \\ x * e &= x && (e \text{ ist rechtsneutral}) \end{aligned}$$

§6.3.2 **Beispiel**.

(1) Die Addition auf \mathbb{R} hat die Zahl Null als neutrales Element. Denn für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt ja

$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x$$

Ebenso ist die Null auch neutrales Element zur Addition auf \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{C} .

(2) Die Multiplikation auf \mathbb{R} hat die Zahl Eins als neutrales Element. Denn für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

Ebenso ist die Eins auch neutrales Element zur Multiplikation auf \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{C} .

(3) Das Verketteten von Abbildungen aus $\text{Abb}(M, M)$ hat die Identität id_M als neutrales Element. Denn in **Satz** §4.3.3 wurde bewiesen, dass für jede Abbildung $M \xrightarrow{f} M$ gilt:

$$f \circ \text{id}_M = f \quad \text{und} \quad \text{id}_M \circ f = f$$

(4) Sei M eine beliebige Menge. Bezüglich der Verknüpfung \cap hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element M . Denn es gilt:

$$M \cap A = A \cap M = A \quad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

(5) Bezüglich der Verknüpfung \cup hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element \emptyset . Denn es gilt:

$$\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A \quad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

- (6) Die fehlerbehaftete Multiplikation aus **Beispiel** §6.2.4 hat die 1 als neutrales Element. Denn wenn ich eine rationale Zahl, die höchstens eine Nachkommastelle besitzt, mit 1 multipliziere, ändert sich nichts, sodass auch das nachfolgende Runden nichts am Zahlenwert ändert.
- (7) Hinsichtlich der Subtraktion auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} ist die Null zwar rechtsneutral, da $x - 0 = x$ für jede Zahl x gilt. Sie ist jedoch kein neutrales Element, denn wegen beispielsweise $0 - 7 \neq 7$ ist sie nicht linksneutral. Zur Subtraktion kann es sogar kein neutrales Element geben: denn wäre e ein neutrales Element, so gälte

$$0 - 4 = (e - 0) - 4 = e - 4 = 4$$

was nicht sein kann.

- (8) Hinsichtlich der Division auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ebenfalls kein neutrales Element.

§6.3.3 **Satz (Eindeutigkeit neutraler Elemente)**. Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X . Sofern X bezüglich $*$ ein neutrales Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.

§6.3.4 **Beweis**. Es seien $d, e \in X$ zwei neutrale Elemente bezüglich der Verknüpfung $*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d &= d * e && \text{(weil } e \text{ neutrales Element)} \\ &= e && \text{(weil } d \text{ neutrales Element)} \end{aligned}$$

■

§6.3.5 **Bemerkung (Das neutrale Element)**. Der Eindeutigkeitsatz berechtigt uns, beim Vorhandensein eines neutralen Elements statt von „einem neutralen Element“ von *dem* neutralen Element zu reden.⁵

An diesem Satz wird vielleicht deutlich, wie vorteilhaft die axiomatische Arbeit mit abstrakten Verknüpfungen sein kann. Denn er garantiert uns auf einen Schlag, dass alle neutralen Elemente aus **Beispiel** §6.3.2 auch jeweils die einzigen neutralen Elemente sind, ohne dass wir dies in jedem Fall einzeln beweisen müssten.

§6.3.6 **Definition (Monoid)**. Ein **Monoid** ist ein Paar $(M, *)$ bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $*$ auf M , für das gilt:

(M1) $*$ ist eine assoziative Verknüpfung.

(M2) M enthält ein neutrales Element (bezüglich der Verknüpfung $*$).

In diesem Fall ist das neutrale Element nach **Satz** §6.3.3 automatisch eindeutig bestimmt.

Ist überdies die Verknüpfung $*$ auch noch kommutativ, so heißt $(M, *)$ ein **kommutatives Monoid**.

§6.3.7 **Beispiel**. Es gilt:

- (1) $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sind jeweils kommutative Monoide. Denn die Addition ist assoziativ und kommutativ und die Zahl 0 ist ihr neutrales Element.
- (2) $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ sind jeweils kommutative Monoide. Denn die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ und die Zahl 1 ist ihr neutrales Element.
- (3) Die Subtraktion und die Division liefern keine Monoide, weil sie nicht assoziativ sind. Und ein neutrales Element besitzen sie ja auch nicht.

⁵vgl. **Notation** §1.3.20

- (4) Ist M eine beliebige Menge, so ist $(\text{Abb}(M, M), \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element id_M . Sofern M mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, ist es aber nicht kommutativ.
- (5) Ist M eine beliebige Menge, so sind $(\mathcal{P}(M), \cup)$ und $(\mathcal{P}(M), \cap)$ zwei kommutative Monoide mit den jeweiligen neutralen Elementen \emptyset und M .
- (6) Die „fehlerbehaftete Multiplikation“ aus [Beispiel §6.2.4](#) besitzt zwar ein neutrales Element – sie liefert aber kein Monoid, weil sie nicht assoziativ ist.
- (7) Die Addition „+“ ist zwar eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 1}$, aber $(\mathbb{N}_{\geq 1}, +)$ ist kein Monoid, da es kein neutrales Element enthält.

§6.3.8 **Bemerkung (Trägermenge).** Beachte, dass ein Monoid immer ein Paar $(M, *)$ ist, in das sowohl die „Trägermenge“ M als auch die Verknüpfung $*$ hineinkodiert sind. Ein und dieselbe Menge kann durchaus als Trägermenge für verschiedene Monoide erhalten. Beispielsweise sind $(\mathbb{N}_0, +)$ und (\mathbb{N}_0, \cdot) zwei verschiedene Monoide, die dennoch dieselbe Trägermenge \mathbb{N}_0 besitzen.

Andererseits gibt es Mengen mit „kanonischen“ Verknüpfungen, wie z.B. $\text{Abb}(X, X)$ (wobei X irgendeine Menge ist). Sprechen Mathematiker von „dem Monoid $\text{Abb}(X, X)$ “, so meinen sie damit grundsätzlich das Monoid $(\text{Abb}(X, X), \circ)$, also $\text{Abb}(X, X)$ mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung. Solche Konventionen wirst du mit der Zeit durch Erfahrung und Gewohnheit verinnerlichen.

Ist im Kontext klar oder gleichgültig, von welcher Verknüpfung die Rede ist, so spricht man abkürzend meist nur von „dem Monoid M “.

§6.3.9 **Bemerkung (Die eigentliche Bedeutung des Kommutativgesetzes).** Es sei $(M, *)$ ein kommutatives Monoid. Weil dann $*$ assoziativ ist, brauchen wir nach [Bemerkung §6.2.5](#) keine Klammern setzen. Sind beispielsweise $a, b, c, d \in M$, so können wir einfach $a * b * c * d$ schreiben. Das Kommutativgesetz

$$x * y = y * x \quad \text{für alle } x, y \in M$$

sagt aus, dass es bei der Verknüpfung zweier Elemente nicht auf die Reihenfolge ankommt. Es lässt sich zeigen, dass es sogar bei der Verknüpfung beliebig vieler Elemente nicht auf die Reihenfolge ankommt. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} a * b * c * d &= a * c * b * d && \text{(Kommutativgesetz für } b \text{ und } c) \\ &= c * a * b * d && \text{(Kommutativgesetz für } a \text{ und } c) \\ &= b * d * c * a && \text{(Kommutativgesetz für } c * a \text{ und } b * d) \end{aligned}$$

usw.

Bei Verknüpfungen, die sowohl assoziativ als auch kommutativ sind, brauchst du weder aufs Klammernsetzen, noch auf die Reihenfolge, in der du die Elemente verknüpfst, achten.

§6.3.10 **Definition (Inverse Elemente).** Sei X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$, die ein (nach [Satz §6.3.3](#) automatisch eindeutig bestimmtes) neutrales Element e besitzt und sei $a \in X$. Ein Element $b \in X$ heißt **invers** zu a , falls es die folgenden beiden *Inversengleichungen* erfüllt:

$$\begin{aligned} a * b &= e && \text{(„} b \text{ ist rechtsinvers zu } a \text{“)} \\ b * a &= e && \text{(„} b \text{ ist linksinvers zu } a \text{“)} \end{aligned}$$

Das Element a heißt **invertierbar** (oder auch: **Einheit**⁶), falls es ein zu a inverses Element in X gibt.

§6.3.11 **Bemerkung** (*Keine Inversen ohne Neutrales*). Beachte, dass es nur bei Vorhandensein eines neutralen Elements überhaupt Sinn ergibt, von inversen Elementen zu sprechen.

§6.3.12 **Beispiel**. Es gilt:

- (1) In den Monoiden $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ist jedes Element invertierbar. Denn für jede ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl x gilt

$$x + (-x) = 0$$

$$(-x) + x = 0$$

sodass $-x$ invers zu x ist.

- (2) Das einzige invertierbare Element im Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ ist die 0, da $0 + 0 = 0$. Für jede andere Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ kann es kein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n + m = 0$ geben.

- (3) In den Monoiden (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) ist jedes Element $\neq 0$ invertierbar. Denn für jede rationale/reelle/komplexe Zahl $x \neq 0$ gilt

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} \cdot x = 1$$

sodass $\frac{1}{x}$ invers zu x ist. Die Null ist dagegen nicht invertierbar. Denn für jede beliebige Zahl x ist $0 \cdot x = 0 \neq 1$, sodass x nicht invers zur 0 sein kann.

§6.3.13 **Beispiel** (*). In **Beispiel** §4.7.2 wurden Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ beschrieben, für die zwar $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ gilt, jedoch $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$. Beispielsweise:

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n + 1 \qquad g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} n - 1 & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Im Monoid $\text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0)$ ist dann g linksinvers zu f , jedoch nicht rechtsinvers. Tatsächlich kann es zu f gar keine inverse Abbildung geben, da f wegen $0 \notin \text{im}(f)$ nicht surjektiv, also erst recht nicht bijektiv, ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen nicht aus der Gültigkeit einer der beiden Inversengleichungen schon auf die andere geschlossen werden kann.⁷

§6.3.14 **Satz** (*Eindeutigkeit inverser Elemente*). Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann ist das inverse Element von a eindeutig bestimmt.⁸

⁶Die Analogie zum Einheitenbegriff aus der Physik (Meter, Kilogramm, ...) besteht darin, dass in einem Monoid jedes Element ein „Vielfaches“ einer jeder Einheit ist (im Sinne einer Teilbarkeitsrelation wie in **Beispiel** §5.1.4), so wie etwa jede Länge als Vielfache der Einheit „Meter“ angegeben werden kann.

⁷Manche Autoren nennen ein Monoid „von-Neumann-endlich“, wenn jedes linksinverse Element auch bereits rechtsinvers ist (und umgekehrt). Wichtigstes Beispiel dafür in der LA1 werden *Matrizenringe* wie $\mathbb{R}^{n \times n}$ sein.

⁸vgl. **Satz** §4.7.3

§6.3.15 **Beweis.** Es seien $e \in M$ das neutrale Element von M und $b, c \in M$ zwei beliebige Inverse zu a . Dann gilt:

$$\begin{aligned} b &= b * e && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \\ &= b * a * c && \text{(da } c \text{ invers zu } a \text{ ist)} \\ &= e * c && \text{(da } b \text{ invers zu } a \text{ ist)} \\ &= c && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

§6.3.16 **Notation (Das inverse Element).** Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Da dann a auch nur genau ein Inverses besitzt, ergibt es Sinn, anstelle von „einem Inversen zu a “ von dem Inversen von a zu sprechen, vgl. **Notation** §1.3.20. Im Folgenden werde ich das Inverse eines invertierbaren Monoidelements a mit „ a^{inv} “ notieren:

$$a^{\text{inv}} := (\text{Das Inverse von } a) \quad (\text{sofern } a \text{ invertierbar ist})$$

Diese Schreibweise ist in der Literatur allerdings unüblich, stattdessen wird meist „ a^{-1} “ geschrieben, siehe **Definition** §6.4.5.

§6.3.17 **Bemerkung (*).** Beachte, dass ich im Beweis von **Satz** §6.3.14 implizit Gebrauch vom Assoziativgesetz gemacht habe (erkennst du, wo?). Bei einer nicht-assoziativen Verknüpfung wie z.B. der fehlerbehafteten Multiplikation aus **Beispiel** §6.2.4, die sowohl kommutativ ist als auch ein neutrales Element besitzt, brauchen Inverse nicht eindeutig sein. Beispielsweise gilt dort

$$\begin{aligned} 0,4 * 2,5 &= 1 \\ 0,4 * 2,6 &= 1 \end{aligned}$$

sodass das Element 0,4 mindestens zwei verschiedene Inverse besitzt, nämlich 2,5 und 2,6.

§6.3.18 **Satz (Rechenregeln für inverse Elemente).** Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:

a) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist $e^{\text{inv}} = e$.⁹

b) Ist $a \in M$ ein invertierbares Element, so ist auch a^{inv} invertierbar und es ist

$$(a^{\text{inv}})^{\text{inv}} = a$$

c) (Regel von Hemd und Jacke) Sind $a, b \in M$ zwei invertierbare Elemente, so ist auch $a * b$ invertierbar und es ist

$$(a * b)^{\text{inv}} = b^{\text{inv}} * a^{\text{inv}}$$

§6.3.19 **Beweis.** a) Da e ein neutrales Element ist, gilt $e * e = e$. Diese Gleichung entspricht beiden Inversengleichungen aus **Definition** §6.3.10 zugleich.

b) Da a^{inv} invers zu a ist, gelten die beiden Gleichungen

$$a * a^{\text{inv}} = e \quad \text{und} \quad a^{\text{inv}} * a = e$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, dass a linksinvers zu a^{inv} ist, und die zweite Gleichung besagt, dass a rechtsinvers zu a^{inv} ist. Insgesamt ist also a invers zu a^{inv} .

⁹Elemente, die invers zu sich selbst sind, heißen **selbstinvers** oder **involutorisch**.

c) Es gilt

$$\begin{aligned} a * b * b^{\text{inv}} * a^{\text{inv}} &= a * e * a^{\text{inv}} & b^{\text{inv}} * a^{\text{inv}} * a * b &= b^{\text{inv}} * e * b \\ &= a * a^{\text{inv}} & &= b^{\text{inv}} * b \\ &= e & \text{sowie} &= e \end{aligned}$$

Insgesamt erfüllt $b^{\text{inv}} * a^{\text{inv}}$ somit beide Inversengleichungen. ■

§6.3.20 **Bemerkung.** Die letzte Aussage heißt „Regel von Hemd und Jacke“ aufgrund folgender Analogie: Habe ich mir erst ein Hemd und daraufhin eine Jacke angezogen und möchte ich mich nun wieder entkleiden, so muss ich zuerst die Jacke und dann das Hemd ausziehen. – Beim Invertieren dreht sich die Reihenfolge um.

§6.4 Mehr Notation

§6.4.1 **Notation (additive und multiplikative Notation).** Zur Notation von Verknüpfungen gibt es zwei Standard-Schemata:

- Eine **additiv geschriebene Verknüpfung** ist eine Verknüpfung, die mit dem Zeichen „+“ notiert wird. Im Ausdruck

$$a + b$$

heißten a, b die **Summanden** und $a + b$ die **Summe**.

In der Algebra herrscht die Konvention vor, *ausschließlich kommutative Verknüpfungen additiv zu schreiben*, weshalb du nichtkommutative Verknüpfungen mit anderen Zeichen notieren solltest.

- Eine **multiplikativ geschriebene Verknüpfung** ist eine Verknüpfung, die mit dem Malpunkt „·“ notiert wird. Im Ausdruck

$$a \cdot b$$

heißten a, b die **Faktoren** und $a \cdot b$ das **Produkt**. Oft wird in diesem Fall auch gar kein Verknüpfungssymbol aufgeschrieben: man schreibt dann „ ab “ anstelle von „ $a \cdot b$ “, so wie du es aus der Schule von der Multiplikation zweier Zahlvariablen kennst.

„Additiv geschrieben“ und „multiplikativ geschrieben“ sind keine mathematischen Eigenschaften einer Verknüpfung, sondern nur Eigenarten der Notation. Prinzipiell ließe sich jede Verknüpfung additiv oder multiplikativ schreiben.

§6.4.2 **Notation (Null- und Einselement).** Sei X eine beliebige Menge. Ist $+$ eine additiv geschriebene Verknüpfung auf X , die ein neutrales Element enthält, so wird dieses in der Regel mit „0“ notiert und das **Nullelement** von X genannt. Per Definition gilt

$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x \quad \text{für alle } x \in X$$

Ist dagegen „·“ eine multiplikativ geschriebene Verknüpfung auf X , die ein neutrales Element enthält, so wird dieses oft mit „1“ notiert und das **Einselement** von X genannt. Per Definition gilt

$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x \quad \text{für alle } x \in X$$

Um zu betonen, dass es sich um das Null- bzw. Einselement von X und nicht etwa um die natürliche Zahl Null bzw. Eins handelt, schreibt man auch

$$0_X \quad \text{bzw.} \quad 1_X$$

Beachte, dass Null- und Einselemente im Allgemeinen nichts mit den herkömmlichen Zahlen Null und Eins zu tun haben müssen! Wir bedienen uns lediglich desselben Zeichens.

§6.4.3 **Notation (Differenzen)**. Seien $(M, +)$ ein additiv geschriebenes Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Das Inverse von a wird dann notiert mit

$$-a := a^{\text{inv}} \quad (\text{bei einer additiv geschriebenen Verknüpfung})$$

Für ein weiteres Element $b \in M$ schreibt man

$$b - a \quad \text{anstelle von} \quad b + (-a)$$

und spricht von der **Differenz** von b und a . Die Inversengleichungen nehmen mit dieser Notation die folgende Gestalt an:

$$a - a = 0 \quad \text{und} \quad -a + a = 0$$

wobei die zweite Gleichung redundant ist, wenn $+$ als kommutativ vorausgesetzt wird.

Bei Termen mit Summen und Differenzen mehrerer Elemente $a_1, \dots, a_n \in M$ lässt man die Klammern in der Regel weg unter der stillschweigenden Vereinbarung, die Terme „linksassoziativ“ zu interpretieren:

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n := (((a_1 \pm a_2) \pm a_3) \pm \dots) \pm a_n$$

Beispielsweise ist der Term $8 - 3 - 1$ zu lesen als $(8 - 3) - 1$ und nicht etwa als $8 - (3 - 1)$.

§6.4.4 **Bemerkung**. Während in der Schule vielleicht Addition und Subtraktion noch als gleichberechtigte „Grundrechenarten“ nebeneinander stehen, wird in der Uni-Mathematik die Addition als vorrangige Verknüpfung verstanden und die Subtraktion aus ihr abgeleitet. Ebenso verhält es sich mit Multiplikation und Division, vgl. **Bemerkung** §6.4.9.

§6.4.5 **Definition (*Potenzen)**. Seien M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$ und $a \in M$ irgendein Element. Für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ heißt das Element, das durch n -faches Verknüpfen von a mit sich selbst entsteht

$$a^n := \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}}$$

die **n -te Potenz von a** . Dabei heißen a die **Basis** und n der **Exponent**. Manchmal wird auch das Verknüpfungszeichen mit in den Exponenten geschrieben:

$$a^{*n} := \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}}$$

Sofern M ein neutrales Element e enthält, setzt man die nullte Potenz auf ebendieses:¹⁰

$$a^0 := e$$

¹⁰Damit ist vom algebraischen Standpunkt auch die Frage nach „Null hoch Null“ beantwortet. In $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$ gilt nach der allgemeinen Definition $0^0 = 1$, da die Eins das neutrale Element zur Multiplikation ist.

Ist überdies auch noch a ein invertierbares Element, so lassen sich auch negative Potenzen definieren. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist dann die n -te Potenz von a definiert als:

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}} & n \geq 1 \\ e & n = 0 \\ \underbrace{a^{\text{inv}} * \dots * a^{\text{inv}}}_{(-n)\text{-mal}} & n \leq -1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $a^{-1} = a^{\text{inv}}$ das Inverse von a . In der Literatur werden inverse Elemente in Monoiden standardmäßig mit „ a^{-1} “ notiert.

§6.4.6 **Notation (*)**. Im additiv geschriebenen Fall bedient man sich jedoch einer anderen Schreibweise. Sei $+$ eine additiv geschriebene, assoziative Verknüpfung auf der Menge M . Für $a \in M$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wird dann die n -te Potenz von a notiert mit

$$n \cdot a := \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}}$$

Man spricht hier auch nicht von einer „ n -ten Potenz“ von a , sondern vom n -**fachen von** a . Sofern M ein Nullelement enthält, ist

$$0 \cdot a := 0_M$$

Ist überdies a invertierbar, so sind auch die negativen Vielfachen definiert: für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$n \cdot a := \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} & n \geq 1 \\ 0_M & n = 0 \\ \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{(-n)\text{-mal}} & n \leq -1 \end{cases}$$

Bei diesen Festlegungen handelt es sich um das Gleiche wie in [Definition §6.4.5](#), nur in einer anderen Schreibweise.

§6.4.7 **Satz (* Potenzgesetze)**. Seien M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$ und $a, b \in M$ zwei miteinander kommutierende Elemente. Für $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{m+n} &= a^m * a^n \\ (a^n)^m &= a^{m \cdot n} \\ (a * b)^n &= a^n * b^n && \text{(sofern } a * b = b * a) \end{aligned}$$

Sofern M ein neutrales Element enthält, gelten diese Gleichungen auch für $m, n = 0$, und sofern überdies a, b invertierbar sind, auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.¹¹

¹¹Es lässt sich zeigen, dass die Definition negativer Potenzen die einzig mögliche Definition ist, mit der die Potenzgesetze allgemein auch für ganzzahlige Exponenten gültig sind.

Beachte, dass für die letzte Gleichung wichtig ist, dass a, b miteinander kommutieren. In nichtkommutativen Monoiden wird im Allgemeinen $(ab)^2 = abab \neq a^2b^2$ sein.

§6.4.8 **Beweis.** Die Potenzgesetze können rigoros mit einem **Induktionsbeweis** bewiesen werden. Da diese Beweistechnik in diesem Skript nicht behandelt wird, könntest du noch abwarten, bis sie in den ersten beiden Semesterwochen durchgenommen wurde, und daraufhin nochmal hierher zurückkehren. ■

§6.4.9 **Bemerkung (*).** Sei M ein Monoid. In **Satz** §6.4.7 habe ich die Potenzgesetze multiplikativ notiert. Hier ist eine Gegenüberstellung der Regeln aus **Satz** §6.3.18 und **Satz** §6.4.7 in multiplikativer und additiver Schreibweise:

Multiplikative Notation	Additive Notation	$a, b \in M, m, n \in \mathbb{N}_0$
$1^{-1} = 1$	$-0 = 0$	
$(a^{-1})^{-1} = a$	$-(-a) = a$	(sofern a invertierbar)
$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$	$-(a + b) = -a - b$	(sofern a, b invertierbar)
$a^0 = 1$	$0 \cdot a = 0$	
$a^1 = a$	$1 \cdot a = a$	
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$	$(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$	
$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$	$m \cdot (n \cdot a) = (m \cdot n) \cdot a$	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$n \cdot (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$	(sofern $a \cdot b = b \cdot a$)

wobei ich im additiven Fall voraussetze, dass $+$ kommutativ ist. In beiden Spalten der Tabelle stehen letztendlich dieselben Regeln, nur anders notiert.

§6.4.10 **Notation (*Bruchschreibweise).** Sei M ein multiplikativ geschriebenes *kommutatives* Monoid. Für $a \in M$ und ein invertierbares Element $u \in M$ gibt es die Schreibweise

$$\frac{a}{u} := a \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot a$$

Hierbei heißen a der **Zähler** und u der **Nenner**. Für diese Notation ist es essenziell, dass M kommutativ ist. Denn andernfalls könnten die beiden Elemente au^{-1} und $u^{-1}a$ durchaus verschieden sein und man müsste zwischen „Links- und Rechtsbrüchen“ unterscheiden.

Ebenso dürfen erstmal nur invertierbare Elemente in die Nenner geschrieben werden; beispielsweise gibt es in \mathbb{Q} keine Zahl der Gestalt „ $\frac{4}{0}$ “. In der abstrakten Algebra werden jedoch Methoden entwickelt, mit denen auch vormals nicht invertierbare Elemente künstlich invertierbar gemacht und in Nenner geschrieben werden können, vgl. **Vorschau** §6.5.9.

§6.4.11 **Bemerkung (*Rechenregeln für Brüche).** Mit Brüchen in kommutativen Monoiden lässt sich rechnen, wie du es aus der Schule gewohnt bist. Wenn du in Stimmung bist, versuche einmal herzuleiten, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0, a, b \in M$ und alle invertierbaren Elemente $u, v, w \in M$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{array}{lll} \frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} = \frac{ab}{uv} & \frac{a}{u} = \frac{b}{v} \Leftrightarrow av = bu & a \cdot \frac{b}{u} = \frac{ab}{u} = \frac{a}{u} \cdot b \\ \frac{a}{1} = a & \frac{1}{u} = u^{-1} & \frac{u}{u} = 1 \\ \frac{au}{vu} = \frac{a}{v} & \left(\frac{a}{u}\right)^n = \frac{a^n}{u^n} & \left(\frac{u}{v}\right)^{-1} = \frac{v}{u} \\ \frac{\frac{a}{u}}{v} = \frac{a}{uv} & \frac{a}{\frac{u}{v}} = \frac{av}{u} & \frac{\frac{a}{u}}{\frac{v}{w}} = \frac{aw}{uv} \end{array}$$

§6.4.12 **Notation (Mehrfachprodukte).** Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $a_m, \dots, a_n \in M$ schreibt man

$$\bigstar_{k=m}^n a_k := a_m * \dots * a_n$$

für die Verknüpfung der a_m, \dots, a_n in aufsteigender Reihenfolge. Beachte, dass auf der rechten Seite keine Klammern gesetzt werden müssen, weil $*$ assoziativ ist, vgl. **Bemerkung** §6.2.5. Es heißen

- k die **Laufvariable**.¹²
- m der **Startwert** der Laufvariable.
- n der **Endwert** der Laufvariable.

Die Laufvariable kann auch allgemeinere Werte durchlaufen, wie etwa ganze Zahlen oder Elemente einer beliebigen totalgeordneten Menge.

Für additiv und multiplikativ geschriebene Verknüpfungen gibt es Sonderzeichen:

- Bei einer additiv geschriebenen Verknüpfung bedient man sich eines großen Sigma Σ (abkürzend für „Summe“):

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + \dots + a_n$$

- Bei einer multiplikativ geschriebenen Verknüpfung bedient man sich eines großen Pi Π (abkürzend für „Produkt“):

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot \dots \cdot a_n$$

Falls M ein neutrales Element e zur Verknüpfung $*$ enthält, sind Mehrfachprodukte auch für den Fall $m > n$, also falls es gar keine Indizes zwischen Start- und Endwert der Laufvariable gibt, erklärt. In diesem Fall ist

$$\bigstar_{k=m}^n a_k := e \quad (\text{falls } m > n)$$

das neutrale Element. Bei additiv oder multiplikativ geschriebenen Verknüpfungen gilt dementsprechend

$$\sum_{k=m}^n a_k = 0 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n a_k = 1 \quad (\text{falls } m > n)$$

Man spricht von der **leeren Summe** und vom **leeren Produkt**.

Ist überdies M ein *kommutatives* Monoid, so können Mehrfachprodukte über beliebige Familien mit endlichen Indexmengen gebildet werden: Ist I eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält, und ist $(a_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Familie von Elementen aus M , so bezeichnet

$$\bigstar_{i \in I} a_i \quad \text{bzw. im additiven Fall:} \quad \sum_{i \in I} a_i \quad \text{bzw. im multiplikativen Fall:} \quad \prod_{i \in I} a_i$$

die Verknüpfung der a_i 's in einer beliebigen (irrelevanten, da $*$ kommutativ ist¹³) Reihenfolge.

¹²Es handelt sich um eine *gebundene Variable* im Sinne von **Notation** §1.1.17.

¹³vgl. **Bemerkung** §6.3.9

§6.4.13 **Beispiel.**

(1) (Binomischer Lehrsatz¹⁴) Für $x, y, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

wobei der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller Möglichkeiten, aus n -vielen Gegenständen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge genau k -viele auszuwählen, bezeichnet. Im Spezialfall $n = 2$ ergibt sich die aus der Schule bekannte binomische Formel $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

(2) Die Notation für Mehrfachprodukte kennst du bereits aus Kapitel 3, wo sie für Durchschnitte, (disjunkte) Vereinigungen und Produkte von Mengen vorgestellt wurde, siehe etwa **Notation** §3.6.6.

(3) („Unendliche“ Mehrfachprodukte?) In der Welt der zweistelligen Verknüpfungen, also dieses Kapitels, ist es nicht ohne Weiteres möglich, auch Verknüpfungen unendlich vieler Elemente zugleich zu definieren. Hierzu wären *infinite Verknüpfungen* (d.h. Verknüpfungen, die unendlich viele Elemente entgegennehmen) oder Zusatzstruktur, wie z.B. eine *Topologie*, nötig. Schon in der Ana1 können, aufbauend auf dem Begriff der *Konvergenz*¹⁵, „unendliche Summen“ studiert werden. Beispielsweise gilt für jede Zahl $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.¹⁶

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

Der Ausdruck „ $\sum_{k=0}^{\infty}$ “ ist allein mit den Werkzeugen aus diesem Kapitel *nicht* wohldefiniert, sondern muss in der Sprache der Analysis verstanden werden. Kannst du dir die Gleichung für den Fall $q = \frac{1}{2}$ intuitiv erklären?

§6.5 Gruppen

§6.5.1 **Definition (Gruppe).** Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist. Konkret handelt es sich bei einer Gruppe also um ein Paar $(G, *)$, bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$ auf G , für das die *Gruppenaxiome* gelten:

- (G1) Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ.
- (G2) G enthält ein neutrales Element.
- (G3) Jedes Element von G ist invertierbar.

Ist überdies die Verknüpfung auch noch kommutativ, so spricht man von einer **abelschen Gruppe**¹⁷ oder von einer *kommutativen Gruppe*.

¹⁴Francesco Binomi (1369-1420)

¹⁵siehe **Definition** §7.4.2

¹⁶vgl. **Aufgabe** §6.6.3

¹⁷Niels Henrik Abel (1802-1829)

§6.5.2 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sind jeweils abelsche Gruppen. Denn die Addition ist assoziativ, kommutativ, besitzt die 0 als neutrales Element und für jede ganze bzw. rationale bzw. reelle bzw. komplexe Zahl x ist $-x$ ebenfalls eine ganze bzw. rationale bzw. reelle bzw. komplexe Zahl und invers zu x .
- (2) Das Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe, da beispielsweise das Element $5 \in \mathbb{N}_0$ nicht invertierbar ist.
- (3) Sofern X eine mindestens zweielementige Menge ist, ist das Monoid $\text{Abb}(X, X)$ keine Gruppe.

§6.5.3 **Beweis** (*). Seien $a \in X$ irgendein Element und $f : X \rightarrow X$ die konstante Abbildung, die alles auf a abbildet. Weil X mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, ist f nicht injektiv und nach **Satz** §4.7.7 somit auch nicht invertierbar in $\text{Abb}(X, X)$. Also ist $\text{Abb}(X, X)$ keine Gruppe. ■

Viele interessante Verknüpfungen liefern erstmal nur Monoide, aber noch keine Gruppen. Allerdings kann aus jedem Monoid eine (mehr oder weniger große) Gruppe extrahiert werden, indem man sich einfach auf die invertierbaren Elemente einschränkt:

§6.5.4 **Definition** (*Einheitengruppe eines Monoids*). Sei M ein Monoid. Die Teilmenge

$$M^\times := \{a \in M \mid a \text{ ist invertierbar}\}$$

heißt die **Einheitengruppe** von M .

§6.5.5 **Satz.** Sei $(M, *)$ ein Monoid. Dann ist die Teilmenge $M^\times \subseteq M$ abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$ und wird mit ihrer Einschränkung zu einer Gruppe. Ist M ein kommutatives Monoid, so ist M^\times eine abelsche Gruppe.

§6.5.6 **Beweis** (*). Sei $e \in M$ das neutrale Element.

(Abgeschlossenheit): Für alle $a, b \in M^\times$ ist auch $a * b \in M^\times$ aufgrund der Regel von Hemd und Jacke. Also schränkt sich $*$ zu einer Verknüpfung auf M^\times ein.

(Assoziativität): Nach **Satz** §6.2.7 ist die auf M^\times eingeschränkte Verknüpfung ebenfalls assoziativ.

(Neutrales Element): Nach **Satz** §6.3.18a) ist $e \in M^\times$. Wegen

$$e * x = x * e = x \quad \text{für alle } x \in M$$

gilt dies erst recht auch für alle $x \in M^\times$. Somit ist e auch das neutrale Element von M^\times .

(Inverse): Sei $a \in M^\times$. Nach **Satz** §6.3.18b) ist auch a^{-1} invertierbar, also $a^{-1} \in M^\times$. Wegen

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

und weil e das neutrale Element von M^\times ist, ist dann a^{-1} auch in M^\times invers zu a .

(Kommutativität): Ist M ein kommutatives Monoid, so ist nach **Satz** §6.2.7 auch die auf M^\times eingeschränkte Verknüpfung kommutativ, sodass M^\times in diesem Fall eine abelsche Gruppe ist. ■

§6.5.7 **Beispiel**

- (1) Nach **Beispiel** §6.3.12 ist die Einheitengruppe des Monoids (\mathbb{R}, \cdot) genau $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit ist $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe.
- (2) Die Einheitengruppe des Monoids (\mathbb{Z}, \cdot) ist $\{1, -1\}$. Also ist $(\{\pm 1\}, \cdot)$ eine Gruppe, die aus genau zwei Elementen besteht.
- (3) Die Einheitengruppe des Monoids $(\mathbb{N}_0, +)$ ist $\{0\}$. Daher ist $(\{0\}, +)$ eine Gruppe, die nur ein einziges Element enthält. Einelementige Gruppen heißen *triviale Gruppen*.¹⁸
- (4) Sei X eine beliebige Menge. Die Einheitengruppe des Monoids $\text{Abb}(X, X)$, deren Elemente also genau die invertierbaren Selbstabbildungen von X sind, heißt die **symmetrische Gruppe** von X . Ihre Elemente heißen **Permutationen** von X . Notation:

$$S(X) := \{f \in \text{Abb}(X, X) \mid f \text{ ist invertierbar}\}$$

Nach **Satz** §4.7.7 besteht $S(X)$ genau aus den bijektiven Selbstabbildungen von X .

- (5) (Vorschau auf LA) Als weiteres wichtiges Beispiel wird dir in der LA1 die Matrizen­gruppe $\text{GL}_n(K)$ der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen begegnet.

Beachte, dass wir bei keinem dieser Beispiele noch einmal beweisen müssen, dass eine Gruppe vorliegt. Alle Beweisarbeit wurde bereits im abstrakten **Satz** §6.5.5 verrichtet.

§6.5.8 **Bemerkung** (*Endliche Permutationsgruppen*). Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ schreibt man

$$S_n := S(\{1, \dots, n\})$$

für die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \dots, n\}$. Diese Gruppen sind von großer Bedeutung in der Gruppentheorie, da sie nach dem **Satz von Cayley**¹⁹ in einem gewissen Sinn „universell“ sind unter allen Gruppen, die nur endlich viele Elemente enthalten. Sie waren historisch auch die ersten Studienobjekte der Gruppentheorie, noch bevor das Konzept „Gruppe“ überhaupt definiert war. Die S_n -Gruppen werden dir bereits in der LA-Vorlesung wieder begegnen, dort spätestens im Kontext von *Matrixdeterminanten*.

§6.5.9 **Vorschau** (* *Gruppenvervollständigung*). Neben dem Konzept „Einheitengruppe“ gibt es ein weiteres Rezept, um aus Monoiden Gruppen zu machen: die **Gruppenvervollständigung** (manche sagen auch: *Grothendieck-Gruppe*²⁰).

Während, um von einem Monoid zu seiner Einheitengruppe zu gelangen, die Trägermenge soweit verkleinert wird, bis nur noch die invertierbaren Elemente übrigbleiben, werden bei der Gruppenvervollständigung „künstliche Inverse“ hinzugefügt. Beispielsweise kann die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ dadurch konstruiert werden, dass man dem Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine „künstliche Inverse $-n$ “ beilegt. Auch die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$ geschieht durch die Hinzufügung künstlicher Inverser, diesmal bezüglich der Multiplikation. Solche Techniken, bei denen man für eine Struktur gewisse wünschenswerte Eigenschaften künstlich erzwingt, sind typisch für die abstrakte Algebra und tauchen dort beispielsweise bei den Konzepten „Abelisierung“, „Quotientenkörper“, „Lokalisierung eines Rings“, „Tensoralgebra“ oder „Zerfällungskörper“ auf.

¹⁸ vgl. **Aufgabe** §6.6.1

¹⁹ Arthur Cayley (1821-1895)

²⁰ Alexander Grothendieck (1928-2014)

§6.6 Aufgabenvorschläge

§6.6.1 **Aufgabe** (*Eigenschaften von Verknüpfungen (L)*). Entscheidet für jede der folgenden Verknüpfungen, ob sie assoziativ ist, kommutativ ist, ob sie ein neutrales Element besitzt und ob sie ein Monoid oder gar eine Gruppe liefert.

- Auf der Menge \mathbb{N} die Verknüpfung $m * n := \max\{m, n\}$.
- Auf der Menge \mathbb{N}_0 die Verknüpfung $m * n := n^m$ (wobei $n^0 = 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$).
- Auf einer beliebigen einelementigen Menge eine beliebige Verknüpfung.
- Auf der Gesamtheit aller Mengen die Verknüpfung $M * N := \{M, N\}$.

§6.6.2 **Aufgabe** (*Einige Rechenregeln für Differenzen*). Seien $(M, +)$ ein additiv geschriebenes kommutatives Monoid, $a, b \in M$ zwei beliebige und $u, v \in M^\times$ zwei invertierbare Elemente. Leitet die folgenden Regeln her:

- $a - (u + v) = a - u - v$
- $a - (u - v) = a - u + v$
- $-(u - v) = v - u$
- $a = b + u \Leftrightarrow a - u = b$

§6.6.3 **Aufgabe** (*Geometrische Reihe*). Vollzieht den Beweis des folgenden Satzes nach. Ist der Beweis korrekt und vollständig? Kann er vereinfacht werden? Stimmt der Satz überhaupt?

§6.6.4 **Satz**. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

§6.6.5 **Beweis**. Es ist:

$$\begin{aligned} (1 - q) \cdot \sum_{k=0}^n q^k &= 1 \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) - q \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n q^{k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} q^k \right) && \text{ („Indexshift“)} \\ &= 1 - q^{n+1} && \text{ („Teleskopsumme“)} \end{aligned}$$

Division durch $(1 - q)$ liefert die gewünschte Gleichung. ■

Kapitel 7

Ausblick auf die Analysis

In diesem Vortrag werden Grundbegriffe der Analysis, wie Ungleichungen, Abstand, Umgebungen und Folgenkonvergenz, besprochen und mit Beispielen illustriert. Die Intuitionsbildung soll hier Vorrang vor Rigorosität haben.

§7.1 Mehr über reelle Zahlen

§7.1.1 **Bemerkung (Struktur auf \mathbb{R}).** Sowohl die rationalen Zahlen \mathbb{Q} als auch die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden einen sogenannten **angeordneten Körper**. Die genaue Definition dieses Begriffs führte zu weit über dieses Kapitel hinaus. Grob gesagt heißt es:

- Mit reellen und rationalen Zahlen lässt sich rechnen. Sie lassen sich addieren, subtrahieren, multiplizieren und, mit Ausnahme der Null, auch dividieren. Dieser algebraische Aspekt wurde in Kapitel 6 vertieft.
- (\mathbb{R}, \leq) und (\mathbb{Q}, \leq) sind totalgeordnete Mengen, d.h. reelle und rationale Zahlen können hinsichtlich ihrer „Größe“ miteinander verglichen werden. Dieser ordnungstheoretische Aspekt wurde in Kapitel 5 vertieft.
- Die Ordnungen auf \mathbb{R} und \mathbb{Q} sind mit den arithmetischen Operationen verwoben, beide Strukturen sind auf gewisse Weise miteinander verträglich. Dies wird im folgenden Satz präzisiert:

§7.1.2 **Satz (Einige Rechenregeln für Ungleichungen).** Für alle reellen Zahlen $x, y, a, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}x \leq y &\iff x + a \leq y + a \\x \leq y &\iff x - a \leq y - a \\x \leq y &\iff \lambda \cdot x \leq \lambda \cdot y && \text{(sofern } \lambda > 0) \\x \leq y &\iff \frac{x}{\lambda} \leq \frac{y}{\lambda} && \text{(sofern } \lambda > 0) \\x \leq y &\iff \lambda \cdot y \leq \lambda \cdot x && \text{(sofern } \lambda < 0) \\x \leq y &\iff \frac{y}{\lambda} \leq \frac{x}{\lambda} && \text{(sofern } \lambda < 0) \\x \leq y &\iff -y \leq -x \\x \leq y &\iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} && \text{(sofern } x, y > 0)\end{aligned}$$

Alle diese Regeln gelten auch, wenn man überall die kleingleich-Relation \leq durch die strikt-kleiner-Relation $<$ ersetzt.

§7.1.3 **Bemerkung.** Einige dieser Regeln werden als „Anordnungsaxiome“ gehandelt. Ich werde hier auf einen Beweis verzichten.

- Die ersten beiden Regeln besagen, dass Addition und Subtraktion jeweils Äquivalenzumformungen für Ungleichungen darstellen. Man sagt auch, die Ordnungsrelation sei *translationsinvariant*, weil sich Addition und Subtraktion als „Verschiebung“ der Zahlengerade vorstellen lassen.
- Die nächsten beiden Regeln besagen, dass auch Multiplikation und Division jeweils Äquivalenzumformungen sind, sofern sie mit einer *positiven* Zahl geschehen.
- Bei Multiplikation und Division mit einer negativen Zahl handelt es sich um „Anti-Äquivalenzumformungen“: bei solchen Umformungen muss die Ungleichung umgedreht werden. Ebenso verhält es sich beim Vorzeichenwechsel und beim Bilden von Kehrwerten positiver Zahlen.

§7.1.4 **Beispiel.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Gegeben sei die folgende Ungleichung

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1}$$

die wir gerne nach der Zahl n umstellen würden.

Wegen $n \in \mathbb{N}$ ist $n+1$ eine positive Zahl, sodass beide Seiten der Ungleichung mit $n+1$ multipliziert werden können.

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1} \iff \varepsilon \cdot (n+1) > 1$$

Da wir $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt haben, können beide Seiten der Ungleichung durch ε dividiert werden:

$$\varepsilon \cdot (n+1) > 1 \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Schließlich können wir von beiden Seiten jeweils 1 abziehen:

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Insgesamt haben wir damit die Ungleichung nach n umgestellt:

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Diese Umformungen werden später in die Beweisfindung für **Beispiel §7.4.5** eingehen.

§7.1.5 **Definition** (* *Die erweiterte Zahlengerade*). Gelegentlich ist es praktisch, die reellen Zahlen um zwei weitere Elemente „ ∞ “ und „ $-\infty$ “ zu erweitern. Das ist alles andere als mysteriös: wir fassen „ ∞ “ und „ $-\infty$ “ schlicht als „Symbole“ auf, als zwei weitere Elemente, die wir der Menge \mathbb{R} künstlich hinzufügen. Die durch diese Hinzufügung entstehende Menge wird manchmal **erweiterte Zahlengerade** genannt und mit

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

notiert. Um den beiden neuen Elementen $\pm\infty$ ihren intendierten Platz hinsichtlich der Ordnung von \mathbb{R} zuzuweisen, legen wir fest, dass

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad (\text{für alle } x \in \bar{\mathbb{R}})$$

d.h. „ $-\infty$ “ sei per Definition kleiner als jede reelle Zahl, „ ∞ “ dagegen größer als jede reelle Zahl. Es lässt sich zeigen, dass $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$ auf diese Weise zu einer totalgeordneten Menge wird.¹ Beachte, dass $\pm\infty$ keine reellen Zahlen sind und dass sich in $\bar{\mathbb{R}}$ auch nur eingeschränkt rechnen lässt.

§7.1.6 **Definition (Betrag und Signum).** Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist ihr **Betrag** definiert als

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

Ihr **Signum** (auch: **Vorzeichen**) ist definiert als

$$\text{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

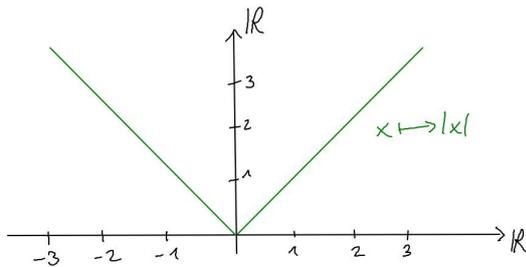


Abbildung 7.1: Graph der Betragsfunktion.

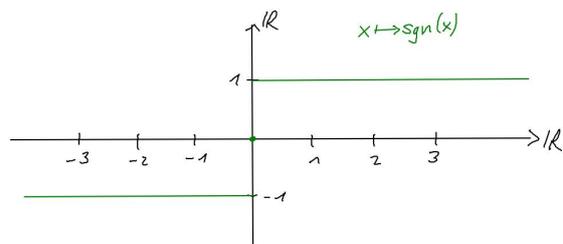


Abbildung 7.2: Graph der Signumsfunktion

§7.1.7 **Beispiel.** Beispielsweise ist

$$\begin{array}{lll} |3| = 3 & |-7| = 7 & |0| = 0 \\ \text{sgn}(3) = 1 & \text{sgn}(-7) = -1 & \text{sgn}(0) = 0 \end{array}$$

§7.1.8 **Bemerkung (Elementare Regeln für Betrag und Vorzeichen).** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{ll} x = \text{sgn}(x) \cdot |x| & |x| = \text{sgn}(x) \cdot x \\ |x| \geq 0 & x \leq |x| \\ |-x| = |x| & \end{array}$$

Weil das Produkt zweier positiver Zahlen oder zweier negativer Zahlen wieder positiv ist, das Produkt einer positiven mit einer negativen Zahl dagegen negativ ist, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y) \quad \text{und} \quad |xy| = |x| \cdot |y|$$

¹Allgemeiner lässt sich auf diese Weise jeder beliebigen geordneten Menge ein künstliches größtes bzw. kleinstes Element hinzufügen.

§7.2 Abstand

§7.2.1 **Bemerkung** (*Abstand im euklidischen Raum*). Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden meist in der Gestalt einer Gerade, der sogenannten *Zahlengerade*, visualisiert. Ebenso können der \mathbb{R}^2 als Menge von Punkten in einer Ebene und der \mathbb{R}^3 als Menge von Punkten im Raum vorgestellt werden, wobei für ein Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ als Koordinaten hinsichtlich eines fixierten Koordinatensystems verstanden werden.

Obwohl es sich bei reellen Zahlen und Vektoren eigentlich um algebraische Objekte handelt, die addiert und vervielfacht werden können, erlaubt es die geometrische Interpretation, sie als „Punkte in einem Raum“ aufzufassen. Zwischen je zwei Punkten auf einer Gerade, in der Ebene oder im Raum kann die Verbindungsstrecke gezogen werden. Die Länge dieser Verbindungsstrecke gibt den *Abstand* der beiden Punkte voneinander an. Der Begriff des Abstands liefert einen von vielen Zugängen zu den Konzepten *Stetigkeit* und *Konvergenz*, der in diesem Kapitel besprochen wird.

Auf der Geraden \mathbb{R} , der Ebene \mathbb{R}^2 und im Raum \mathbb{R}^3 ist der Abstandsbegriff ein abgeleiteter Begriff, insofern Abstände als Länge von Verbindungsvektoren definiert sind. Eine direkte Axiomatisierung des Abstandsbegriffs, die auf keinerlei weitere Zusatzstruktur angewiesen ist, geht folgendermaßen:

§7.2.2 **Definition** (**Abstandsfunktion*). Sei X eine beliebige Menge. Eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine **Abstandsfunktion** oder auch **Metrik**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ d(x, y) &= d(y, x) && \text{(Symmetrie)} \\ x = y &\leftrightarrow d(x, y) = 0 && \text{(Definitheit)} \end{aligned}$$

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion d auf X . Die Elemente eines metrischen Raums werden auch **Punkte** genannt. Für Punkte $x, y \in X$ heißt $d(x, y)$ der **Abstand** von x zu y . Ist die konkrete Abstandsfunktion im Kontext klar oder gleichgültig, spricht man schlicht von „dem metrischen Raum X “. Der Buchstabe d für die Abstandsfunktion kommt von englisch „distance“.

§7.2.3 **Bemerkung** (*zur Dreiecksungleichung*). Der Name „Dreiecksungleichung“ kommt aus der ebenen Geometrie. Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte in der Ebene, die ein Dreieck bilden, so besagt die Dreiecksungleichung, dass „der direkte Weg von x nach z nicht länger als der Umweg über y sein kann“. Vgl. Abb. 7.3

§7.2.4 **Bemerkung**. Manchmal wird die Definitheitseigenschaft auch abgeschwächt, indem anstelle von „ \leftrightarrow “ nur „ \rightarrow “ gefordert wird; man spricht dann von einer *Pseudometrik*. Manchmal wird auch „ ∞ “ als Abstand zugelassen.² In jedem Fall aber soll d eine Art „Abstand zwischen Punkten“ bezeichnen.

Die Dreiecksungleichung solltest du dir einprägen! Bei ihr handelt es sich (auch schon in der Ana1) um das wichtigste Werkzeug zum Abschätzen von Abständen. Versuche, dir die anderen beiden Eigenschaften der Metrik intuitiv zu merken: Die Symmetrie besagt, dass der Abstand von x zu y gleich dem Abstand von y zu x ist. Die Definitheit impliziert, dass jeder Punkt Abstand Null zu sich selbst hat.

§7.2.5 **Definition** (*Abstand in \mathbb{R}*). Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist der herkömmliche Abstand definiert als

$$d(x, y) := |x - y|$$

Diesbezüglich wird (\mathbb{R}, d) zu einem metrischen Raum, was hier ohne Beweis bleiben soll. Ab sofort wird \mathbb{R} stets mit dieser Abstandsfunktion ausgestattet, ohne dass dies noch einmal ausdrücklich erwähnt würde.

²Meiner Meinung nach sollte die Variante mit Abstand ∞ zum Standard erhoben werden.

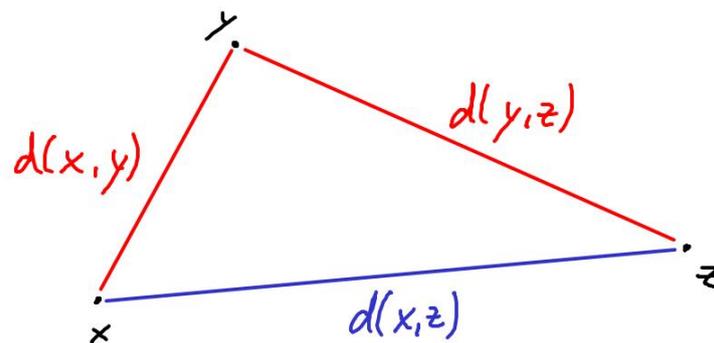


Abbildung 7.3: Dreiecksungleichung: Der direkte Weg $d(x, z)$ ist stets kürzer als der Umweg $d(x, y) + d(y, z)$.

§7.2.6 **Beispiel.** Beispielsweise ist

$$d(5, 2) = 3 \quad d(-2, 5) = 7 \quad d(3, 3) = 0$$

Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|x| = |x - 0| = d(x, 0)$$

d.h. der Betrag einer Zahl ist genau ihr Abstand zur Null.

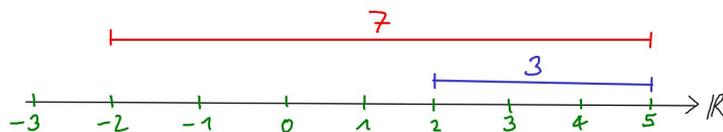


Abbildung 7.4: Abstände auf der reellen Geraden

§7.2.7 **Beispiel (Weitere Metriken).**

- (1) (ebene und räumliche Abstände) In der Ebene \mathbb{R}^2 , im Raum \mathbb{R}^3 und allgemein im \mathbb{R}^n (für ein $n \in \mathbb{N}$) ist der Abstand zweier Punkte gleich der Länge ihrer Verbindungsstrecke. Dies wird in den Analysis-Vorlesungen genauer definiert werden. Ich gehe davon aus, dass dir intuitiv klar ist, wie der Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum zu verstehen ist, und werde es ab und zu in einem informellen Sinn nutzen, um mehrdimensionale Beispiele und Illustrationen beisteuern zu können.
- (2) (Topologische Datenanalyse) Nicht immer müssen die „Punkte“ eines metrischen Raums eine geometrische Bedeutung besitzen. Beispielsweise wäre ein metrischer Raum X gegeben durch die Menge der Nutzer einer Dating-App, die bei ihrer Anmeldung verschiedene persönliche Vorlieben und Eigenschaften angegeben haben. Für zwei Nutzer $a, b \in X$ könnte dann der „Abstand“ $d(a, b)$ definiert sein als die Anzahl aller Kategorien, in denen a und b verschiedene Präferenzen angegeben haben. Nutzer mit vielen Gemeinsamkeiten wären sich bezüglich dieser Metrik also besonders „nahe“.

§7.2.8 **Definition (offene Bälle).** Seien X ein metrischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt die Menge

$$\mathbb{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

all derjenigen Punkte, deren Abstand zu a strikt kleiner als r ist, der **offene Ball um a mit Radius r** .

§7.2.9 **Beispiel.** In der Ebene \mathbb{R}^2 haben die offenen Bälle die Gestalt einer Kreisscheibe, im Raum \mathbb{R}^3 die Gestalt einer Kugel. Beachte, dass die offenen Bälle keinen „Rand“ haben. Denn $\mathbb{B}_r(a)$ besteht ja nur aus den Punkten, deren Abstand zu a strikt kleiner als r ist. Diejenigen Punkte, deren Abstand zu a genau gleich r ist (im Zweidimensionalen also genau die Punkte auf dem Kreisrand, im Dreidimensionalen die Punkte auf der Kugeloberfläche), sind nicht in $\mathbb{B}_r(a)$ enthalten.

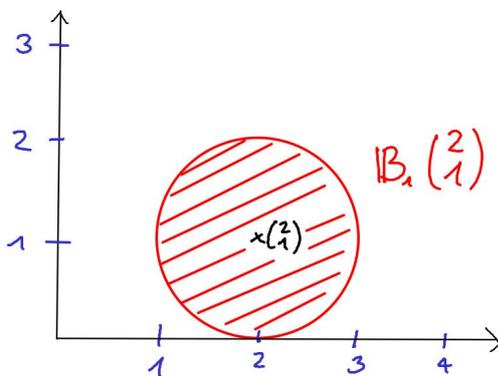


Abbildung 7.5: Der Ball $\mathbb{B}_1(2, 1)$ im \mathbb{R}^2 .

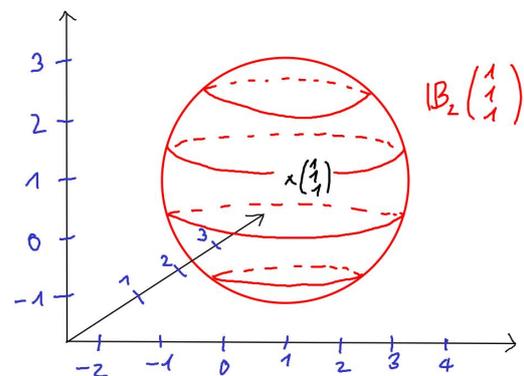


Abbildung 7.6: Der Ball $\mathbb{B}_2(1, 1, 1)$ im \mathbb{R}^3 .

§7.2.10 **Beispiel (offene „Bälle“ in \mathbb{R}).** Betrachte den metrischen Raum \mathbb{R} . Für $a = 4$ und $r = \frac{3}{2}$ ist

$$\mathbb{B}_{3/2}(4) = \{x \in \mathbb{R} \mid |4 - x| < \frac{3}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\frac{1}{2} < x < 5\frac{1}{2}\} = (2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$$

Allgemein gilt für reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\mathbb{B}_r(a) = (a - r, a + r)$$

d.h. in \mathbb{R} stimmen die offenen Bälle um a überein mit offenen Intervallen mit Mittelpunkt a .

Dieses Beispiel zeigt, dass die offenen Bälle in metrischen Räumen nicht unbedingt wie „Bälle“ aussehen brauchen.

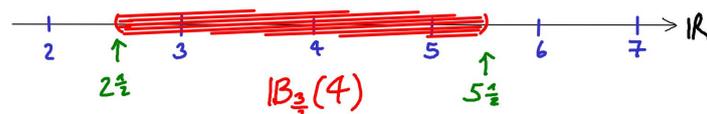


Abbildung 7.7: Der offene Ball $\mathbb{B}_{3/2}(4)$ in \mathbb{R} .

§7.2.11 **Definition** (*Umgebung in einem metrischen Raum*). Seien X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine Teilmenge und $a \in U$ ein Punkt. a heißt ein **innerer Punkt von U** und U heißt eine **Umgebung von a** , wenn es ein (möglicherweise winzig kleines) $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$.

§7.2.12 **Beispiel**. Es gilt:

- (1) Das abgeschlossene Intervall $[0, 4]$ ist eine Umgebung der 2, da $\mathbb{B}_1(2) = (1, 3) \subseteq [0, 4]$.
- (2) Dagegen ist $[0, 4]$ keine Umgebung der 0, denn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $-\varepsilon/2 \in \mathbb{B}_\varepsilon(0) \setminus [0, 4]$. Vgl. Abb. 7.9
- (3) Betrachten wir das Quadrat $Q := [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$, so ist Q weder eine Umgebung der Eckpunkte, noch aller weiteren Randpunkte. Denn jeder noch so kleine ε -Ball um einen Randpunkt lugt ja immer ein Stück über den Quadratrang hinaus, ist also nicht vollständig im Quadrat enthalten, vgl. Abb. 7.10. Allerdings ist Q eine Umgebung jedes der Punkte im „Inneren“ des Quadrats. Diese letzte Behauptung ist nicht wirklich beweisbar, weil es sich dabei gerade um eine *Definition* des „Inneren“ handelt.
- (4) Für einen metrischen Raum X und einen Punkt $a \in X$ ist jeder ε -Ball um a trivialerweise eine Umgebung von a , da $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(a)$.

§7.2.13 **Bemerkung** (*Intuition*). Die Auffassung eines „Raums“, wie z.B. der euklidische dreidimensionale Raum, als „Punktmenge“ ist vergleichsweise jung und trug wesentlich zur Entstehung des Mengenbegriffs bei. Vormalig wurden Raum und Linie eher als eine Art „Kontinuum“ verstanden, auf dem zwar einzelne Punkte ausgezeichnet werden können, das aber eine über die Ansammlung von Punkten hinausgehende Qualität der „Kontinuität“ besitzt. Auch über die physikalische Realität des Punktbegriffs, eines ausdehnungslosen Orts im Raum oder in der Zeit, lässt sich streiten.³

In Physik und Stochastik können meist nur Näherungsbereiche für einen Punkt angegeben werden. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Dartspieler exakt die Mitte des Dartboards trifft, exakt 0,0%, da es sich bei der „Mitte des Boards“ um eine mathematische Idealisierung, einen Ort ohne Ausdehnung handelt. Dagegen kann für das Treffen des etwa 1cm breiten Bullseye durchaus eine positive Wahrscheinlichkeit angegeben werden, die bei einem professionellen Spieler wie zum Beispiel Phil „The Power“ Taylor weit im zweistelligen %-Bereich liegt.

Beim Bullseye-Feld handelt es sich um eine „Umgebung“ des Board-Mittelpunkts. Per Definition beinhaltet eine Umgebung U eines Punkts a einen ε -Ball. Der Punkt hat also einen gewissen „Puffer“ in U um sich herum.

§7.3 Zahlenfolgen

§7.3.1 **Bemerkung** (*Das Zeichen „ \mathbb{N} “*). In diesem Abschnitt (und auch überall sonst in diesem ganzen Skript) wird die Menge der natürlichen Zahlen, sofern die Null eingeschlossen ist, mit „ \mathbb{N}_0 “ notiert und, sofern die Null ausgeschlossen ist, mit „ $\mathbb{N}_{\geq 1}$ “. In Situationen, in denen es keine Rolle spielt oder klar ist, ob die Null dabei ist oder nicht, schreibe ich einfach nur „ \mathbb{N} “.

³Mit einer Formalisierung der Konzepte „Nähe“ und „Abweichung“, die unabhängig vom Vorhandensein von Punkten ist, beschäftigt sich die **punktfreie Topologie**, die bislang aber noch keinen Einzug in den mathematischen Mainstream gefunden hat.

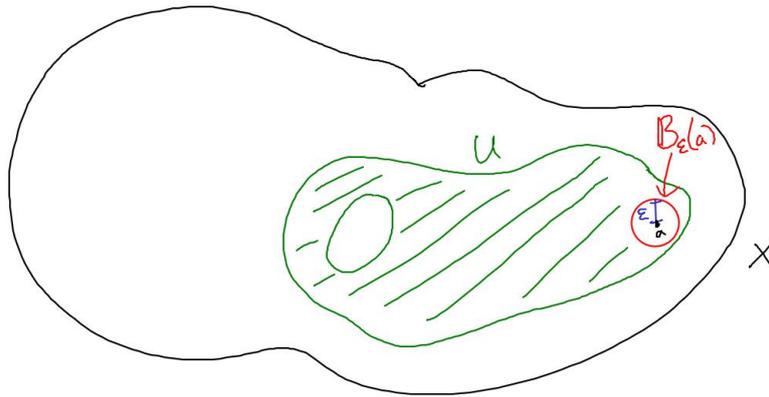


Abbildung 7.8: Im metrischen Raum X ist U eine Umgebung des Punktes a , weil sie den ε -Ball $B_\varepsilon(a)$ umfasst.

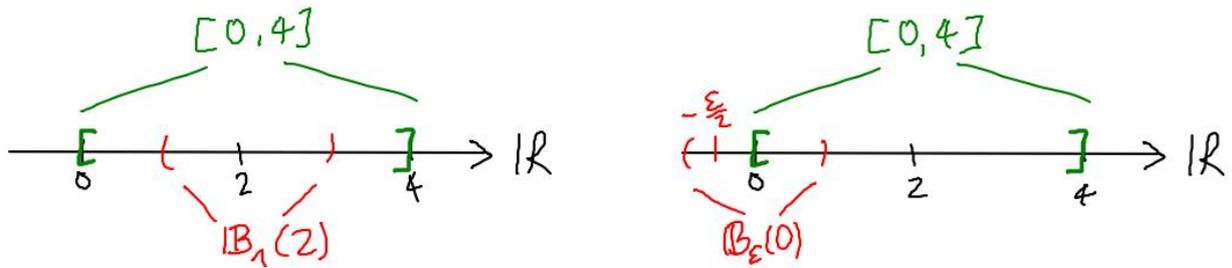


Abbildung 7.9: Das Intervall $[0, 4]$ ist eine Umgebung der 2, aber nicht der 0.

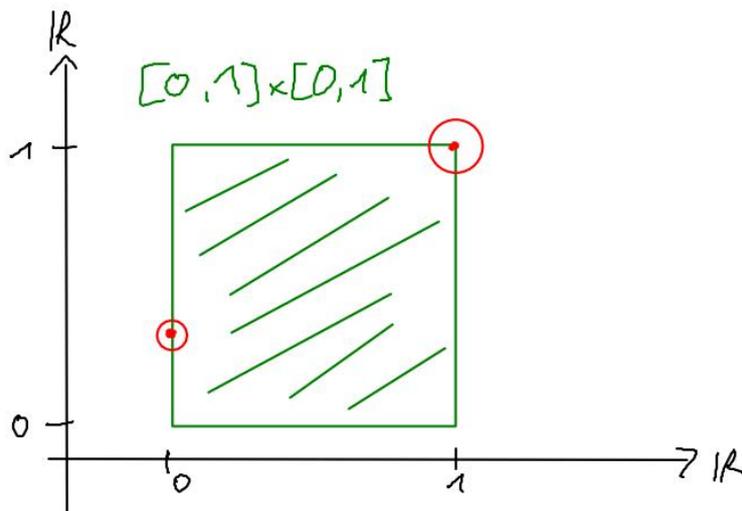


Abbildung 7.10: Die Randpunkte des Quadrats sind keine inneren Punkte, weil jeder ε -Ball ein Stück weit über den Rand hinaus reicht.

§7.3.2 **Definition (Folge).** Eine **Folge** ist eine Familie von Objekten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Indexmenge die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist. Ist $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl, so spricht man manchmal auch bei Familien, deren Indexmenge $\mathbb{Z}_{\geq n}$ ist, von Folgen. In diesem Fall starten die Indizes nicht bei Eins oder Null, sondern bei n . Der Begriff der Folge ist also nicht präzise umrissen.

Sind A eine Menge und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, deren Einträge allesamt in A liegen, so spricht man von einer *Folge von Elementen aus A* oder einer „ A -wertigen Folge“. Nach [Definition §3.5.5](#) bezeichnet

$$A^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A\}$$

die Menge aller Folgen mit Einträgen aus A . Im Spezialfall $A = \mathbb{R}$ spricht man von **reellen Zahlenfolgen** oder auch **reellwertigen Folgen**. Analog spricht man von rationalen Zahlenfolgen, Folgen ganzer Zahlen oder komplexen Zahlenfolgen, falls es sich um Elemente von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ oder $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ handelt.

§7.3.3 **Notation.** Folgen lassen sich sowohl über eine exakte Angabe definieren, etwa

$$(n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

als auch über eine suggestive Aufzählung der ersten paar Folgenglieder, etwa⁴

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \dots$$

Die „Definition durch Auflistung“ ist allerdings nicht mathematisch präzise und sollte nur dann benutzt werden, wenn unmissverständlich klar ist, welche Folge gemeint ist. Würdest du etwa erraten, dass mit

$$0, \quad 2, \quad 12, \quad 36, \quad 80, \quad 150, \quad 252, \quad 392, \quad \dots$$

die Zahlenfolge $(n^2 \cdot (n+1))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gemeint sein soll?

§7.3.4 **Bemerkung (Folge vs. Menge ihrer Einträge).** Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht mit der Menge ihrer Einträge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu verwechseln.⁵ Beispielsweise sind die beiden Zahlenfolgen

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & \dots \\ 1, & 3, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1, & 3, & \dots \end{array}$$

voneinander verschieden, während die Mengen ihrer Einträge, nämlich $\{1, 2, 3\}$, übereinstimmen.

§7.3.5 **Beispiel.** Beispiele für reelle Zahlenfolgen sind:

- (1) Die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, \dots$
- (2) Die Folge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- (3) Die „alternierende Folge“ $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Also $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$
- (4) Die Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$. Die Einträge dieser Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ können beschrieben werden mit der Formel:

$$a_n := \begin{cases} -\frac{n}{2} & n \text{ ist eine gerade Zahl} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ist eine ungerade Zahl} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

⁴vgl. [Notation §3.1.6](#)

⁵vgl. [Notation §3.5.3](#) und [Beispiel §3.5.8](#)

- (5) Die Folge der Kehrwerte natürlicher Zahlen $(1/n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$. Das ist $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Bei dieser Folge gehen die Indizes erst bei Eins los.
- (6) Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$. Also $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
- (7) Die „konstante Folge“ $(3)_{n \in \mathbb{N}}$. Also $3, 3, 3, 3, 3, \dots$
- (8) Für $q \in \mathbb{R}$ die Folge der q -Potenzen $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Mit $q = 2$ erhielte man beispielsweise die Folge der Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

In all diesen Beispielen gehorchen die Folgenglieder einer einfachen Regel. Dies muss aber nicht immer der Fall sein. Eine Folge darf auch völlig chaotisch sein und ihre Einträge brauchen keinem Muster zu gehorchen. Beispielsweise ist die Folge der Nachkommastellen von [Chaitins Konstante](#) so komplex, dass sie sich nicht mit einem konventionellen Computerprogramm ausrechnen lässt.

Hier noch ein Beispiel für eine Folge, deren Einträge mal keine Zahlen sind:

- (9) Die Folge $(\{1, \dots, n\})_{n \in \mathbb{N}_0}$, deren Einträge die „Anfangsstücke“ von $\mathbb{N}_{\geq 1}$ sind. Also

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots$$

Dies ist keine Zahlenfolge, sondern eine Folge von Mengen. Sie besitzt die Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ihr n -ter Eintrag eine Menge ist, die genau n -viele Elemente enthält.

Eine riesige Datenbank ganzzahliger Zahlenfolgen ist die [On-Line Encyclopedia of Integer Sequences](#).

§7.3.6 **Definition (Beschränktheit)**. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt **nach oben beschränkt** bzw. **nach unten beschränkt**, falls die Menge ihrer Einträge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine nach oben bzw. nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} im Sinne von [Definition §5.2.27](#) ist. Konkret ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also genau dann

- **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. In diesem Fall heißt ein solches M eine **obere Schranke** für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt ein solches M eine **untere Schranke** für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- **beschränkt**, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
- **unbeschränkt**, wenn sie nicht beschränkt ist.

§7.3.7 **Beispiel**. Es gilt:

- (1) Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt.
- (2) Die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ ist nach oben unbeschränkt. Dies ist die Aussage des [Satzes von Euklid](#) aus [Beispiel §2.5.12](#).
- (3) Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, nach oben durch 1 und nach unten durch -1 .

Da die Beschränktheit einer Folge allein von der Menge ihrer Einträge abhängt, ist sie unempfindlich gegenüber einer Änderung der Reihenfolge der Folgenglieder.

§7.3.8 **Definition (Monotonie)**. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt

- **(monoton) wachsend**, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ auch $a_m \leq a_n$ ist.
- **(monoton) fallend**, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt: $a_m \geq a_n$.
- **monoton**, falls sie wachsend oder fallend ist.

Gilt sogar $a_m < a_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$, so sagt man auch, die Folge sei *strikt wachsend*. Ähnlich definiert man *strikt fallend*.

Mit einem *Induktionsbeweis* lässt sich zeigen, dass die Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bereits dann wachsend bzw. fallend ist, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In der Praxis erspart einem diese Charakterisierung, die hier ohne Beweis bleiben soll, gelegentlich Beweisarbeit.

§7.3.9 **Beispiel.** Es gilt:

- (1) Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da zum Beispiel $(-1)^3 < (-1)^4$ aber auch $(-1)^4 > (-1)^5$.
- (2) Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist strikt wachsend.

§7.3.10 **Beweis.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

sodass $\frac{(n+1)}{(n+1)+1} > \frac{n}{n+1}$ ist. ■

- (3) Für $q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ ist die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

§7.3.11 **Beweis.** Weil für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= q \cdot q^n \\ &\geq 1 \cdot q^n && \text{(wegen } q \geq 1 \text{ und } q^n > 0) \\ &= q^n \end{aligned}$$

■

§7.3.12 **Definition** (“eventually”). Sei E eine Eigenschaft. Ich sage, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

besitzt die Eigenschaft E für hinreichend große n ,

falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass die Folge $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ die Eigenschaft E besitzt. Salopp gesagt: „Es gibt einen Zeitpunkt N derart, dass diejenige Folge, bei der erst zum Zeitpunkt N eingestiegen wird, die Eigenschaft E besitzt.“⁶

§7.3.13 **Beispiel.**

- (1) Die Folge

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \dots$$

ist nicht monoton. Sie könnte aber zu einer strikt wachsenden Folge gemacht werden, ließe man die ersten zwei Folgenglieder weg. Somit ist sie „wachsend für hinreichend große n “.

⁶Im Englischen ist die Sprechweise “the sequence eventually satisfies E ” gebräuchlich. Leider besitzt sie kein etabliertes Pendant im Deutschen.

- (2) Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dagegen nicht einmal für hinreichend große n wachsend, denn egal wie spät wir auch einsteigen, immer wieder geht es von -1 zu 1 herauf und von 1 zu -1 herunter.
- (3) Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine (unter Umständen winzig kleine) positive reelle Zahl, so sind die Einträge der Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ für hinreichend große n (um genau zu sein für $n > \frac{1}{\varepsilon}$) kleiner als ε . Die Brüche $\frac{1}{n}$ werden „für hinreichend große n beliebig klein“.

§7.4 Folgenkonvergenz

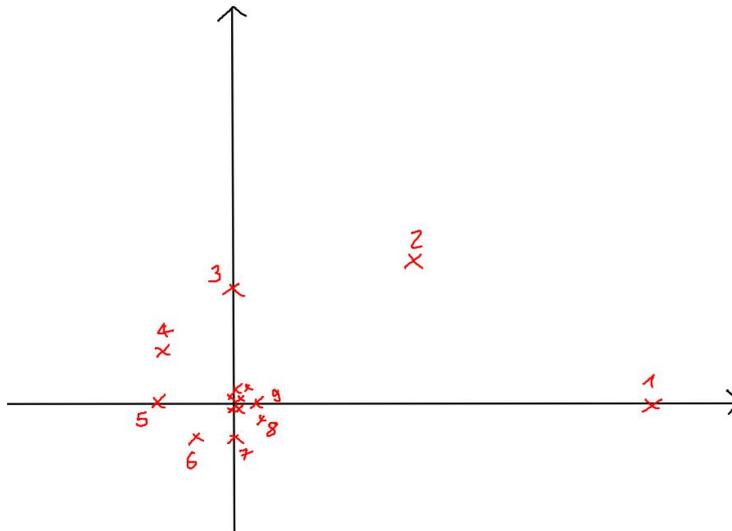


Abbildung 7.11: Eine konvergente Folge von Punkten in der Ebene

§7.4.1 **Bemerkung (Intuition).** Betrachten wir einmal eine Folge von Punkten in der Ebene, die sich spiralförmig dem Ursprung annähert. Konkret könnte man

$$a_n := \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n \cdot \pi/4) \\ \sin(n \cdot \pi/4) \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}$$

definieren, aber das soll gerade keine Rolle spielen.

Du siehst, dass die Folgenglieder dem Koordinatenursprung immer näher kommen, dass sie ihm „für hinreichend große n beliebig nahe kommen“. Genau das heißt Konvergenz.

§7.4.2 **Definition (Folgenkonvergenz).** Seien X ein metrischer Raum, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a , falls eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:

- (i) Für jede (noch so kleine) Umgebung U von a gilt: Für hinreichend große n liegen alle a_n 's in U .
- (ii) Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.
Als Formel:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : d(a_n, a) < \varepsilon$$

In diesem Fall heißt a ein **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

In diesen Ausdrücken fungiert das Zeichen „ n “ als gebundene Variable im Sinne von **Notation** §1.1.17. Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**. Andernfalls heißt sie **divergent**.

§7.4.3 **Beweis.** (i)→(ii): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Weil der ε -Ball $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ eine Umgebung von a ist, folgt aus (i), dass die a_n 's für hinreichend große n in $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ liegen, also dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $a_n \in \mathbb{B}_\varepsilon(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. Per Definition des Balles $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ ist dies genau die Aussage von (ii).

(ii)→(i): Sei $U \subseteq X$ eine beliebige Umgebung von a . Nach **Definition** §7.2.11 gibt es dann ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$. Nach (ii) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. Per Definition des Balles $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ heißt das gerade, dass die a_n 's in $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ liegen für hinreichend große n , wegen $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$ dann auch in U . ■

§7.4.4 **Bemerkung** („Sei $\varepsilon > 0$ “). Diese Grenzwertdefinition ist vergleichsweise jung: sie stammt aus dem 19. Jahrhundert und wurde durch Cauchy⁷ und Weierstraß⁸ populär. Bis dahin herrschte in der Mathematik ein eher intuitiver Umgang mit Grenzwerten vor.

Definition (i) ist prägnant, recht leicht zu merken und geeignet, um manche allgemeinen Sätze zu beweisen. Dagegen ist das Logik-Monstrum (ii) diejenige Definition, die relevant wird, wenn du von einer konkreten Zahlenfolge ausrechnen willst, dass sie konvergiert.

In der Analysis hat es sich eingebürgert, in Definitionen und Beweisen jene Abstände, die „beliebig klein“ werden können, mit einem epsilon ε zu notieren. Bei Definitionen und Beweisen der Analysis, die exzessiven Gebrauch von ε 's machen, spricht man von „Epsilontik“.

§7.4.5 **Beispiel.** In \mathbb{R} gilt:

$$\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$



Abbildung 7.12: Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

§7.4.6 **Bemerkung.** Bevor wir versuchen, für diese Aussage einen Bilderbuchbeweis hinzuschreiben, wollen wir „auf dem Skizzenblatt“ erstmal ein paar Überlegungen anstellen:

Nach **Definition** §7.4.2(ii) müssen wir für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ gilt:

$$\varepsilon > d\left(1, \frac{n}{n+1}\right)$$

⁷Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)

⁸Karl Weierstraß (1815 - 1897)

Mit ein paar Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\left(1, \frac{n}{n+1}\right) &= \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (\text{da } n \in \mathbb{N})$$

Die Ungleichung $\varepsilon > d(1, n/(n+1))$ lautet also

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1}$$

Mit den Umformungen aus [Beispiel §7.1.4](#) kann sie nach n umgestellt werden:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Setzen wir nun N auf die nächstgrößere natürliche Zahl oberhalb von $1/\varepsilon$ (man könnte für N auch jede weitere Zahl, die größer als $1/\varepsilon - 1$ ist, verwenden), so sind sowohl N als auch alle $n \in \mathbb{N}_{>N}$ größer als $1/\varepsilon - 1$, sodass die Ungleichung aufgeht.

Damit haben wir die Aufgabe auf dem Schmierblatt gelöst. Im finalen Beweis lassen wir die Überlegungen, die uns zur Wahl von N geführt haben, weg. Dies tritt häufig in Analysis-Beweisen auf: die Beweise unterdrücken den Gedankenprozess, der zu ihrem Auffinden geführt hat und verlaufen genau in die entgegengesetzte Richtung:

§7.4.7 Beweis. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Sei $N \in \mathbb{N}$ irgendeine natürliche Zahl, die größer als $1/\varepsilon$ ist. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} d(1, a_n) &= \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< \frac{1}{N} && (\text{da } N \leq n) \\ &< \varepsilon && (\text{da } N > 1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit liegen ab dem N -ten Eintrag alle Folgenglieder in $\mathbb{B}_\varepsilon(1)$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt war, ist damit bewiesen, dass die a_n 's gegen 1 konvergieren. ■

§7.4.8 Bemerkung (Langzeitverhalten einer Folge). Nach [Aufgabe §5.4.1](#) ist auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch die Relation „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stimmen überein für hinreichend große n “ eine Äquivalenzrelation gegeben. Das Langzeitverhalten einer Folge, sowie alle Eigenschaften, die eine Folge „für hinreichend große n “ besitzt, hängen

allein von ihrer Äquivalenzklasse ab. Darunter fallen auch Konvergenz und Divergenz. Die ersten paar Millionen Folgenglieder haben für sich allein keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten, weil die Folge ja ab dem dreimillionsten Eintrag plötzlich eine ganz andere Richtung einschlagen könnte. Würde man die ersten paar Millionen Folgenglieder beliebig austauschen, hätte dies keine Auswirkung auf das Konvergenzverhalten.

§7.4.9 **Beispiel** (*Konstante Folgen konvergieren*). Seien X ein metrischer Raum, $x \in X$ ein beliebiger Punkt und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , die für hinreichend große n konstant gleich x ist. Dann ist $\lim_n a_n = x$.

§7.4.10 **Beweis**. Sei U eine beliebige Umgebung von x . Wegen $x \in U$ und weil die a_n 's für hinreichend große n alle gleich x sind, liegen sie für hinreichend große n alle in U . Weil die Umgebung U beliebig gewählt war, konvergiert die Folge nach **Definition** §7.4.2(i) gegen x . ■

§7.4.11 **Vorschau** (**Ordnungstopologie*). Aufgrund von **Beispiel** §7.2.10 ist es möglich, Konvergenz reellwertiger Folgen rein ordnungstheoretisch zu definieren. Sind $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so kann man definieren, dass die a_n 's genau dann gegen a konvergieren, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < a$ für hinreichend große n auch $x < a_n$ ist und wenn für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $a < y$ für hinreichend große n auch $a_n < y$ ist. Auf diese Weise lässt sich auch die Konvergenz von Folgen auf der erweiterten Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ definieren. Zum Beispiel gälte dann $\lim_n n^2 = \infty$. Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ würde dagegen auch in $\bar{\mathbb{R}}$ divergieren.

Das dahinterliegende Prinzip heißt **Ordnungstopologie** und erlaubt es, die Konzepte „Umgebung“ und „Konvergenz“ in beliebigen totalgeordneten Mengen zu definieren, ohne dass sie mit einer Abstandsfunktion ausgestattet sein müssten. Für viele „Räume“ aus der Analysis wie z.B. \mathbb{C} oder den \mathbb{R}^3 ist das Konzept des metrischen Raums aber wohl angebrachter.

§7.5 Analytisches Arbeiten

§7.5.1 **Satz** (*Rechenregeln für Folgengrenzwerte*). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dann gilt:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (sofern $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

§7.5.2 **Beweis**. Die Aussagen sollen hier ohne Beweis bleiben. Sie ergeben sich in der Analysis daraus, dass

- die Addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$,
- die Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$,
- und die multiplikative Inversion $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

jeweils *stetige Funktionen* sind. Grob heißt das, dass hinreichend kleine Abweichungen in x, y auch nur kleine Abweichungen in $x + y, xy$ und $\frac{1}{x}$ nach sich ziehen.

§7.5.3 **Bemerkung** (*Komplizierte Objekte in einfache Bausteine zerlegen*). Sätze wie dieser sind von immenser Bedeutung für die Analysis. Sofern du einen kleinen Vorrat an Folgen, für die du ihre Konvergenz bewiesen hast, aufgebaut hast, erlauben sie dir, Grenzwerte für die kompliziertesten Folgen auszurechnen, ohne dass du für einen Beweis nochmal die ε 's auskramen müsstest.

Beispielsweise würde kein routinierter Mathematiker einen ε -Beweis dafür führen, dass die Folge

$$\left(1 + \frac{3n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 4 konvergiert. Sondern er würde schlicht bemerken, dass sich diese Folge zerlegen lässt in

$$(1)_{n \in \mathbb{N}} + 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

und dann auf die Rechenregeln für $\lim_{n \rightarrow \infty}(-)$ verweisen. Denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n}{n+1}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1\right) + 3 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}\right) = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

Diese Denkweise kennst du auch aus der Schule: Um beispielsweise die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$$

zu berechnen, würdest du ausnutzen, dass sich diese Funktion aus den Bausteinen

$$g(x) = x^2 \quad h(x) = 3x \quad q(x) = e^x$$

zusammensetzt via

$$f(x) = (g(x) + h(x)) \cdot q(x)$$

Mithilfe von Summen- und Produktregel würdest du schlussfolgern

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g'(x) + h'(x)) \cdot q(x) + (g(x) + h(x)) \cdot q'(x) \\ &= (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x \end{aligned}$$

Die „analytische Methode“, komplexe Funktionen in einfache Bestandteile zu zerlegen, ist auch an der Uni überlebensnotwendig. Kein erfahrener Mathematiker würde, um die Ableitung von $(x^2 + 3x) \cdot e^x$ zu berechnen, unmittelbar mit der Definition der Ableitung arbeiten und versuchen, den Differenzialquotienten

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 + 3(x+h)) \cdot e^{x+h} - (x^2 + 3x) \cdot e^x}{h}$$

direkt auszurechnen.

Ein Ziel der Analysis-Vorlesung ist es, dich mit Werkzeugen auszustatten, die das Berechnen von Grenzwerten bequem machen und Epsilontik vermeiden. Versuche in Analysis-Beweisen, die Objekte immer soweit es geht in einfachste Bausteine zu zerlegen und einen ε -Beweis erst wenn gar nichts anderes mehr geht als Ultima Ratio anzusetzen.

§7.5.4 **Beispiel.** Schauen wir uns nochmal die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ aus **Beispiel** §7.4.5 an. Mithilfe der Regeln aus **Satz** §7.5.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} && \text{(Bruch um den Faktor } n \text{ kürzen)} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} && \text{(Satz §7.5.1d)} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} && \text{(Satz §7.5.1a)} \\ &= \frac{1}{1 + 0} && \text{(da } \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0, \text{ siehe Beispiel §7.3.13)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Sofern bekannt ist, dass alle beteiligten Folgen konvergieren (was in obiger Gleichungskette stillschweigend vorausgesetzt wurde), können wir auf diese Weise den Grenzwert berechnen, ohne mit ε 's arbeiten zu müssen.

§7.6 Aufgabenvorschläge

§7.6.1 **Aufgabe (Ungleichungen auflösen).** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $0 < y < 1$. Löst die folgenden Ungleichungen nach der Variablen x auf:

a) $4x + 3 \leq 7x - 6$

b) $\frac{x-1}{x+1} \leq y$

c) $x - 1 \leq \frac{xy - 1}{x + 1}$

d) $\frac{x-2}{x^2-4} \leq 5$ (vorausgesetzt, dass $x \neq \pm 2$)

§7.6.2 **Aufgabe (Hausdorff-Eigenschaft⁹(L)).** Seien X ein metrischer Raum, $a, b \in X$ zwei verschiedene Punkte und $D := d(a, b)$.

Beweist mithilfe der Dreiecksungleichung, dass $\mathbb{B}_{D/2}(a) \cap \mathbb{B}_{D/2}(b) = \emptyset$, und verdeutlicht die Situation mit einem Bild.

§7.6.3 **Aufgabe (Teilmengen skizzieren).** Visualisiert die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} jeweils durch eine Zeichnung und beurteilt, welche Elemente jeweils innere Punkte sind:

a) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [3k + 1, 3k + 2]$

b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-n, \frac{n}{n+1} \right]$

c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{B}_{1/n}(7)$

d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

§7.6.4 **Aufgabe (Eigenschaften von Folgen (L)).** Untersucht jede der folgenden Folgen darauf, ob sie (nach oben oder unten) beschränkt, monoton oder monoton für hinreichend große n ist.

a) Die Folge der Kehrwerte natürlicher Zahlen $(1/n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$. Also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

b) Die Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$

c) Die Folge $(n^2 - 6n)_{n \in \mathbb{N}}$. Also $0, -5, -8, \dots$

d) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei a_n definiert sei als die Quersumme von n

⁹Felix Hausdorff (1868-1942)

Anhang A

Entstehungsprozess eines Beweises

Das Schreiben eines mathematischen Beweises lässt sich grob in drei Phasen gliedern, die in diesem Abschnitt einmal durchgegangen werden. Parallel zu deren abstrakter Beschreibung wird ein ganz konkretes Beispiel aus der Linearen Algebra entwickelt:

§A.1 **Aufgabe.** Gegeben seien die folgenden Vektoren im \mathbb{R}^3 :

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man beweise, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

§A.2 **Phase 1 (Recherche).** In diesem Schritt stellt ihr sicher, euch auf dem Stand der Dinge zu befinden:

- Sofern ihr nicht die Bedeutung aller in der Aufgabenstellung vorkommenden Begriffe kennt, müsst ihr sie im Vorlesungsskript, in eurem Aufschrieb, in einem Lehrbuch oder im Internet nachschlagen. Solange ihr nicht genau wisst, was die Aufgabe besagt, könnt ihr sie nicht lösen.
- Mit den Definitionen allein kommt ihr meist aber noch nicht weit. Denn in der Regel wurden in der Vorlesung bereits ein paar praktische Aussagen bewiesen, die euch die Arbeit zu erleichtern. Erstsemestern passiert es nicht selten, dass sie keinen genauen Überblick darüber, was genau in der Vorlesung bewiesen wurde und was nicht, haben, und deshalb unnötige Mehrarbeit verrichten, indem sie unbeabsichtigt versuchen, bereits in der Vorlesung bewiesene Sätze noch einmal von Neuem zu beweisen.
- Ein Problem, das vor allem das erste Studiensemester betrifft, ist, dass gewisse „offensichtliche“ oder bereits aus der Schule bekannte Aussagen für die Lösung der Übungszettel nicht verwendet werden sollen, weil sie noch nicht in der Vorlesung hergeleitet wurden. Leider ist im ersten Semester manchmal nicht ganz klar, was denn nun alles für bekannt vorausgesetzt werden darf und wobei es sich um „nichttriviale“ Aussagen, die eines Beweises bedürfen, handelt. Im Zweifelsfall solltet ihr bei eurem Tutor / eurer Tutorin nachfragen. Glücklicherweise löst sich diese Problematik spätestens im dritten Semester auf.

Zu dem Beispiel mit den Basisvektoren: Solange ich nicht genau weiß, was eine „Basis des \mathbb{R}^3 “ ist, kann ich die Aufgabe nicht lösen. Ein Blick in den Vorlesungsaufschrieb verrät mir:

Das Tripel (v_1, v_2, v_3) ist genau dann eine Basis des \mathbb{R}^3 , wenn es für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmte reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, für die $v = av_1 + bv_2 + cv_3$.

An dieser Definition könnte ich nun meinen Beweis ausrichten. Damit würde ich aber unnötige Beweisarbeit verrichten, die bereits in der Vorlesung erledigt wurde. Denn dort wurde die folgende Aussage bewiesen:

Da der \mathbb{R}^3 dreidimensional ist, ist das Tripel (v_1, v_2, v_3) schon dann eine Basis, wenn es linear unabhängig ist.

Dies führt mich auf den Begriff „linear unabhängig“, dessen Bedeutung ich, sofern sie mir nicht klar ist, ebenfalls nachschlagen muss:

Die Vektoren (v_1, v_2, v_3) heißen *linear unabhängig*, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ bereits gelten muss, dass $a, b, c = 0$.

Damit habe ich jetzt alle Definitionen beisammen und hoffe, dass ich keinen weiteren Satz aus der Vorlesung, der mir noch mehr Arbeit abnehmen könnte, übersehen habe¹. Beachte auch, wie mir das Nachschlagen des Vorlesungssatzes Arbeit abgenommen hat. Anfangs hätte ich beweisen müssen, dass es für jeden beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmte Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ gibt. Nun muss ich dies nur noch für den Fall $v = 0$ beweisen. Das ist eine erhebliche, unmittelbare Vereinfachung der Aufgabe!

§A.3 **Bemerkung.** Die Recherchephase ist auch für die Spitzenforschung nicht zu unterschätzen. Probleme im Wissensaustausch sind vielleicht das größte Hindernis mathematischen Fortschritts. So schreibt Peter Johnstone in der Einführung seines Buchs *Stone Spaces* (1982), einem Standardwerk der punktfreien Topologie:

The enormous increase in the number of practising mathematicians since the 1930s has inevitably produced a corresponding decrease in the range of mathematical knowledge that each one possesses on average, and the effect of this is easy to see: theorems and techniques which are commonplace in one field are laboriously and imperfectly rediscovered in adjacent ones.

Gehöre also später nicht zu den Mathematikern, die ihre Zeit damit vergeuden, solche Sätze, die in Fachkreisen längst bewiesen wurden, unter großen Mühen und auch nur halbgar neu zu beweisen, nur weil sie zu schlecht informiert sind; oder zu den Programmierern, die eine Prozedur furchtbar kompliziert und ineffizient programmieren, nur weil ihnen die frei zugänglichen Bibliotheken unbekannt sind, in denen die Algorithmen bereits hocheffizient implementiert sind! Bei Unklarheit frag am besten bei einer dedizierten KI nach.

§A.4 **Phase 2 (Rumprobieren).** Dies ist die kreative Phase. Nachdem ihr euch möglichst alle Hilfsmittel, die euch die Vorlesung zum Thema bereitstellt, vergegenwärtigt habt, müsst ihr nun irgendwie einen Beweis aus dem Hut zaubern. Oft werden eure Überlegungen auch dazu führen, dass ihr nochmal zu Phase 1 zurückgeht und weitere Definitionen und Sätze nachschlagt.

- Beleuchtet das Problem von mehreren Seiten. Wenn eine Implikation $A \rightarrow B$ zu beweisen ist: seht euch die Kontraposition $\neg B \rightarrow \neg A$ an und schaut, ob ihr dadurch eher auf eine Beweisidee kommt. Oder nehmt an, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten und schaut, ob daran irgendetwas faul ist.
- In dieser Phase ist wirklich *alles* erlaubt. Ihr könnt völlig ungerechtfertigt irgendwelche Vermutungen aufstellen und mit Hypothesen arbeiten, die euch zwar plausibel erschienen, über die ihr euch aber gar nicht hundertprozentig sicher seid. Ihr braucht euch hier an keinerlei Logikregeln halten und könnt jeden noch so fernliegenden Bullshit ausprobieren. In dieser Phase betreibt ihr „experimentelle Mathematik“, die nicht logisch fundiert sein muss.

¹Später in der LA1-Vorlesung wird meist ein „Determinantenkriterium“ bewiesen, das die Aufgabe nochmal erheblich vereinfachen würde.

- Manchmal kann ein Beweis „von hinten nach vorne“ gefunden werden: ihr beginnt mit der zu zeigenden Aussage und sucht nach Prämissen, unter deren Annahme ihr die Aussage beweisen könnt². Dann versucht ihr, diese Prämissen zu beweisen, bis ihr irgendwann bei einer Aussage angekommen seid, die ihr schon an und für sich beweisen könnt. Ich markiere auf meinem Schmierblatt solche Gleichungen, die ich als Hypothesen verwende und die noch „zu zeigen“ sind, mit einem Ausrufezeichen, und solche Hypothesen, die mir im Beweis helfen könnten, an deren Gültigkeit ich jedoch zweifle, mit einem Fragezeichen:

$$a, b, c \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{lies: „}a, b, c \text{ sollen gleich Null sein“})$$

$$\text{Ext}_G^2(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \stackrel{?}{=} 0 \quad (\text{lies: „Ist } \text{Ext}_G^2(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ wirklich Null?“})$$

Beachtet aber: Während ihr in Phase 2 von hinten nach vorne arbeiten könnt, müsst ihr in Phase 3, wenn es um das Aufschreiben des Beweises geht, so gut es geht „von vorne nach hinten“ arbeiten.

- Haltet im Vorlesungsmaterial nach Aussagen von ähnlicher Art wie die Aufgabenstellung Ausschau. Möglicherweise könnt ihr Beweistechniken aus der Vorlesung imitieren.
- In dieser Phase werdet ihr möglicherweise mehrere Schmierblätter mit für andere Leute völlig unsinnigen, unlesbaren Skizzen vollschreiben. Egal! Es geht hier um eure Ideenfindung und erst in der nächsten Phase werdet ihr eure Gedanken für Andere verständlich machen müssen.
- Werd im ersten Semester nicht zum Einzelkämpfer! Tausche dich mit deinen Zetelpartnern oder anderen StudentInnen aus! In dieser Phase geht es darum, einen möglichst großen Vorrat an Ideen anzuhäufen, aus dem sich früher oder später die Lösung formen muss. Manchmal hat dein Zetelpartner den entscheidenden Gedanken, der noch fehlt, um deine Strategie aufgehen zu lassen, und es wäre dumm und schade, wenn er ihn dir nicht mitteilte. Außerdem kann sich die Gedankenwelt deiner Partner fundamental von deiner eigenen unterscheiden und nur durch Austausch mit Anderen (einschließlich Lehrbücher und Internetseiten) kannst du ein vielseitiges Verständnis für mathematische Objekte gewinnen.

Diese Phase endet, sobald ihr einen Ansatz gefunden und weiterentwickelt habt, von dem ihr euch sicher seid, dass er zu einem wasserdichten Beweis taugt.

Zu dem Beispiel mit der Basis im \mathbb{R}^3 : Die Recherche hat ergeben, dass ich nur noch beweisen muss: Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

so müssen bereits $a, b, c = 0$ sein. Da es sich um eine Gleichung im \mathbb{R}^3 handelt, kann ich sie in ein System dreier Gleichungen zerlegen:

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ 2a + c &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann ich nun einerseits mit Schulwissen, andererseits mit dem in der LA-Vorlesung präsentierten *Gauß-Algorithmus* lösen.

²Für ein Beispiel siehe *Bemerkung* §2.3.25.

Damit ist eine vielversprechende Beweisstrategie gefunden. Auf dem Schmierblatt vergewissere ich mich nun mit ein paar Umformungen, die für nicht-eingeweihte Leser keinen Sinn ergeben müssen, dass das Gleichungssystem tatsächlich auf $a, b, c = 0$ führt:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow c = -2a & \rightsquigarrow -a + b = 0 & \rightsquigarrow b = a & \rightsquigarrow a + 2a - 2a = 0 \\ \rightsquigarrow a = 0 & \rightsquigarrow c = -2a = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst. Jetzt muss die Lösung nur noch ordentlich aufgeschrieben werden.

§A.5 **Phase 3 (Aufschreiben)**. In dieser Phase geht es darum, einen gut lesbaren Beweistext zu produzieren, der allen Regeln der Kunst gerecht wird. Oftmals werdet ihr in dieser Phase auf Schwächen im Beweis stoßen, die euch dazu zwingen, nochmal in Phase 2 zurückzugehen und Reparaturen vorzunehmen.

- Macht euch die logische Struktur eures Beweises deutlich und überlegt euch eine Gliederung der Beweisschritte. Schreibt diese in der Reihenfolge der logischen Argumentationskette auf, nicht in der Reihenfolge der kreativen Ideenkette, die euch auf den Beweis geführt hat. Ist der Beweis kompliziert, solltet ihr aber, sofern es eurem Leser hilft, ein paar Meta-Bemerkungen darüber, welche Idee hinter dem aktuellen Beweisschritt steckt, einstreuen.
- Sorgt für ein ausgeglichenes Wechselspiel zwischen Formeln und Umgangssprache.
- Stellt sicher, dass ihr jede Aussage, die ihr im Beweis verwendet und die nicht völlig naheliegend ist, begründet.
- Wenn ihr euch spezielle Aussagen aus der Vorlesung zunutze macht, schreibt so etwas wie: „Aus der Vorlesung ist bekannt“ oder „Nach Vorlesung gilt...“
- Zeige deinen Beweis deinen Zettpartnern. Wenn sie ihn ohne Zusatzerklärungen nicht verstehen, muss er verbessert werden. Der Beweis muss am Ende selbsterklärend für deinen Tutor / deine Tutorin sein.
- Sollte sich herausstellen, dass eure Lösung eine Lücke besitzt, für die euch einfach keine Lösung einfällt – lasst sie stehen. *Ein häufiger Erstsemesterfehler besteht darin, viel zu viel Zeit in die Bearbeitung der Übungszettel zu investieren* – Zeit, die nützlicher und nachhaltiger darin angelegt wäre, die Vorlesung zu reflektieren, Literatur zu studieren, Freundschaften aufzubauen und das Leben zu genießen.
- Sollte euer Beweis, wie gerade beschrieben, am Ende noch Lücken enthalten: Seid ehrlich zu euch selbst und eurem Tutor! Ihr werdet mehr Anerkennung und Respekt erwerben, wenn ihr in einer kurzen Anmerkung darauf aufmerksam macht, an welcher Stelle noch eine Lücke besteht, und erläutert, woran genau es scheitert, als wenn ihr versucht, eure Lücke mit wirren Formulierungen und komplizierten Formeln zu verschleiern.

Der letzte Punkt ist vielleicht der allerwichtigste: Niemand erwartet, dass ihr von Anfang an perfekte Zettelabgaben produziert! Es ist der Job eures Profs, eures Tutors und euer selbst, euch mathematisches Arbeiten beizubringen. Falls ihr methodisches oder inhaltliches Unverständnis habt, dürft ihr das nicht verschleiern oder gar euch dafür schämen! Vielmehr solltet ihr versuchen, dieses Unverständnis zu reflektieren und klar auszuformulieren. Das allein ist schon ein schwieriges Unterfangen, für dessen Gelingen euch Anerkennung zusteht!

Zu dem Beispiel mit der Basis im \mathbb{R}^3 : Hier ist ein Beweis, den ich am Ende aufschreiben würde.

§A.6 **Beweis.** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass, da der \mathbb{R}^3 ein dreidimensionaler Vektorraum ist, eine Familie dreier Vektoren im \mathbb{R}^3 genau dann eine Basis ist, wenn sie linear unabhängig ist. Demnach genügt es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a + 2b + c = 0 \\ \text{II} \quad a + b + c = 0 \\ \text{III} \quad 2a \quad \quad + c = 0 \end{array}$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{l} 2a + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -2a \\ \xrightarrow[\text{in II einsetzen}]{c=-2a} \quad -a + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = a \\ \xrightarrow[\text{in I einsetzen}]{b=a, c=-2a} \quad a + 2a - 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 \\ \xrightarrow{b=a} \quad b = 0 \\ \xrightarrow[c=-2a]{a=0} \quad c = 0 \end{array}$$

Also sind $a, b, c = 0$. Da $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt waren, sind die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und somit eine Basis. ■

Anhang B

Mathematischer Jargon

abuse of notation: Um die Übersichtlichkeit mathematischer Formelsprache zu wahren, wird gelegentlich ein Zeichen mit mehreren verschiedenen Bedeutungen zugleich oder einer inkorrekten Syntax verwendet. Ist beispielsweise $(G, *)$ eine Gruppe, so spricht man meist von „der Gruppe G “ und geht unerschwerlich davon aus, dass die Verknüpfung $*$ vom Leser mitgedacht wird.

Ansatz: Herangehensweise, einen Beweis zu führen, ein Problem zu lösen oder ein Objekt zu definieren. Beispielsweise ist die **quadratische Ergänzung** ein Ansatz zum Lösen quadratischer Gleichungen.

Ausgeartet: Ein Objekt, das gewisse für die Formulierung der Theorie zuvorkommende Eigenschaften nicht besitzt. Das Gegenteil ist ein **nicht-ausgeartetes** Objekt. Beispielsweise ist ein Dreieck ausgeartet, wenn alle seine drei Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Beliebig: Markiert die Formulierung einer Allaussage. In einem Beweis läutet die Fixierung eines *beliebigen* Objekts den Beweis einer Allaussage ein.

Charakterisierung: Äquivalente Beschreibung eines Objekts. Beispielsweise lassen sich gleichseitige Dreiecke darüber charakterisieren, dass alle Innenwinkel 60° betragen.

Echt: wahlweise von der Bedeutung „strikt“ oder „nichttrivial“. Beispielsweise sind die *echten Teiler* einer natürlichen Zahl n alle Teiler von n , mit Ausnahme des „trivialen Teilers“ n selbst. Die *echten Teilmengen* einer Menge M sind alle Teilmengen von M mit Ausnahme der „trivialen Teilmenge“ M (und eventuell \emptyset).

Eindeutig bestimmt: Markiert das Vorliegen einer Kennzeichnung im Sinne von **Notation** §1.3.20. Ein mathematisches Objekt ist durch eine Eigenschaft *eindeutig bestimmt*, falls es das einzige Objekt mit dieser Eigenschaft ist. Beispielsweise ist der Mittelpunkt eines Kreises eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft, dass er zu jedem Punkt auf dem Kreisrand denselben Abstand hat. Dagegen ist die komplexe Quadratwurzel von -1 nicht eindeutig bestimmt, weil sowohl die komplexe Zahl i als auch die Zahl $-i$ jeweils Quadratwurzeln von -1 sind.

Elementar: Eine mathematische Aussage ist *elementar*, wenn ihr Beweis wenig Vorarbeit und Definitionen benötigt und auf wenige andere Sätze angewiesen ist. Andernfalls spricht man von einer **tiefen** Aussage. Werden im Laufe der Zeit neue Beweise gefunden, kann eine vormals tiefe Aussage elementar werden.

Fast alle: Alle Elemente einer Menge mit Ausnahme einer im Kontext „kleinen“ Teilmenge. Hat in der Algebra oft die Bedeutung „alle bis auf endlich viele“.

Gegenbeispiel: Ein Objekt, das eine Allaussage widerlegt, indem es dieser Aussage widerspricht. Beispielsweise ist die Aussage, dass jede reelle Zahl eine reelle Quadratwurzel besitzt, falsch, und wird durch das Gegenbeispiel -1 (und ebensogut jede andere negative Zahl) widerlegt.

Im Allgemeinen nicht: Eine Aussage gilt *im Allgemeinen nicht*, wenn sie nicht immer wahr ist. Beispielsweise besitzt eine reelle Zahlenfolge im Allgemeinen keinen Grenzwert.

Induzieren: Sofern irgendein mathematisches Objekt a automatisch bereits die Existenz eines weiteren mathematischen Objekts b mit sich bringt, sagt man auch, das Objekt b werde vom Objekt a *induziert*.

Sind beispielsweise X, Y zwei Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, so *induziert* f gemäß **Definition** §4.4.1 zwei Abbildungen zwischen den Potenzmengen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(Y), A \mapsto f(A) \\ \mathcal{P}(Y) &\rightarrow \mathcal{P}(X), B \mapsto f^{-1}(B) \end{aligned}$$

die Teilmengen von X und Y ihre Bild- und Urbildmengen zuordnen.

Kanonisch: Ein Objekt ist *kanonisch*, wenn es sich um ein Standard-Beispiel handelt, wenn es als Standard-Struktur eines anderen Objekts angesehen wird oder wenn es *natürlich* (siehe unten) ist. Andernfalls heißt es **unkanonisch**. Beispielsweise besitzt der \mathbb{R}^n eine kanonische Basis, die sogenannte Standardbasis, wohingegen der Folgenraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ keine kanonische Basis besitzt, die Wahl einer Basis daher unkanonisch wäre. Die „kanonische“ Gruppenstruktur auf \mathbb{Z} besteht aus der Addition. Schreiben Mathematiker von „der Gruppe \mathbb{Z} “, so ist damit so gut wie immer die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ gemeint.

Konstruktiv: Ein Beweis oder eine Theorie sind *konstruktiv*, wenn jede ihrer Existenzaussagen mit einem Beispiel belegt ist. Andernfalls sind sie **nichtkonstruktiv**. Beispielsweise ist die Aussage „Jede surjektive Abbildung besitzt eine Rechtsinverse“ nichtkonstruktiv.

Korollar: Folgerung aus einem größeren mathematischen Satz.

Lemma: Hilfssatz, der an und für sich von geringerem Interesse ist, oftmals aber wichtige und technische Beweisarbeit einschließt, auf die später im Beweis eines bedeutsamen Satzes zurückgegriffen wird.

Mathematischer Komparativ: Schreiben Mathematiker so etwas wie „ a ist größer als b “, so ist darin oft auch der Fall mit eingeschlossen, dass a und b die Eigenschaft in genau demselben Grad aufweisen, also „ a ist größergleich b “. Möchte man diesen Fall explizit ausschließen, kann man so etwas wie „ a ist *strikt* größer als b “ schreiben.

Modulo: Das Arbeiten mit Faktormengen. Der Begriff wird auch im übertragenen Sinne verwendet, wenn Objekte nicht vollständig, aber bis auf „vernachlässigbare“ Unterschiede voneinander unterschieden werden. Beispielsweise ist die Lösung der Gleichung $x^2 = 4$ in \mathbb{Z} „eindeutig bis auf (modulo) Vorzeichen“.

Natürlich: Eine mathematische Konstruktion wird *natürlich* genannt, wenn sie besonders naheliegend ist, nicht auf willkürliche Wahlen angewiesen ist, aus den Definitionen „in natürlicher Weise“, quasi wie von selbst, emergiert oder sich in einem „universellen“, allgemeinen Kontext definieren lässt. Andernfalls heißt sie **unnatürlich**.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA): Eine Annahme in einem Beweis kann *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* (oder auch: *ohne Einschränkung*) geschehen, wenn sie streng genommen zwar nicht jeden von der zu beweisenden Aussage eingeschlossenen Fall abdeckt, der Verlust an Allgemeinheit aber nur oberflächlich ist, indem sich der allgemeine Fall leicht aus dem spezielleren ableiten lässt oder so naheliegend zu beweisen ist, dass er nicht der Rede wert ist. Sind beispielsweise m, n zwei natürliche Zahlen, so kann oBdA angenommen werden, dass $m \leq n$. Denn eine der beiden Zahlen wird kleinergleich die andere sein und im Fall $n \leq m$ können die Variablen schlicht umbenannt werden.

Pathologisch: Ein mathematisches Objekt verhält sich *pathologisch*, wenn es in sich Eigenschaften vereint, die kontraintuitiv oder unerwünscht sind. Pathologien dienen oft als Gegenbeispiele um zu beweisen, dass eine Eigenschaft eine andere Eigenschaft nicht impliziert. Beispielsweise braucht eine stetige Funktion an keiner Stelle differenzierbar sein, wie die pathologische **Weierstraß-Funktion** demonstriert. Das Gegenteil von „pathologisch“ ist **regulär**. In vielen Fachbereichen besitzt das Wort „regulär“ jedoch eine präzise festgelegte Bedeutung, die meist überaltert ist, aus Gründen der Kommunikation jedoch beibehalten wird.

QED: Latein für *quod erat demonstrandum* – „was zu beweisen war“. Wurde früher ans Ende eines mathematischen Beweises geschrieben. Heutzutage sind kleine Symbole wie \square , \blacksquare oder \diamond zur Markierung des Beweisendes üblich.

Rigoros: Ein Beweis oder eine Definition ist *rigoros*, wenn er logische Schlüsse präzise und ausführlich beschreibt. Ein nicht-rigoroser Beweis weicht gelegentlich auf ungenaue Plausibilitätsargumente aus, begründet die Gültigkeit gewisser Hypothesen nicht oder vernachlässigt Spezialfälle. Eine nicht-rigore Definition bedient sich ungenauer Formulierungen mit der Intention, irgendwie werde dem Leser schon klar, was gemeint ist. Beispielsweise werden Potenzen in **Definition §6.4.5** definiert durch

$$a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

was allerdings ungenau ist, weil nicht erklärt wird, was die Pünktchen \dots und der Ausdruck „ n -mal“ bedeuten sollen. Eine rigorose Definition geschähe rekursiv, wobei im Vorfeld erst bewiesen werden müsste, dass rekursive Definitionen wohldefiniert sind.

Trivial: Eine mathematische Aussage heißt *trivial*, wenn sie sich unmittelbar aus den Definitionen der in ihr vorkommenden Begriffe ergibt. Andernfalls heißt sie **nichttrivial**. Beispielsweise ist die Aussage „Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ ist genau dann surjektiv, wenn $\text{im}(f) = Y$ “ trivial, wohingegen die Aussage „Rechtskürzbare Abbildungen sind surjektiv“ eher nichttrivial ist. Mit der Zeit werden dir immer mehr Aussagen trivial erscheinen.

Ein mathematisches Objekt heißt *trivial*, wenn es simpel konstruierbar und vielleicht auf den ersten Blick nicht von größerem Interesse ist. Beispielsweise ist $(\{0\}, +)$ eine „triviale Gruppe“.

Verallgemeinerung: Ein mathematischer Satz A ist eine *Verallgemeinerung* eines Satzes B , wenn er den Satz B in sich einschließt oder wenn B aus A abgeleitet werden kann. Eine solche Ableitung kann allerdings alles andere als naheliegend oder einfach sein. Das Gegenteil ist der Begriff des **Spezialfalls** oder der **Instanz**. Beispielsweise ist der *Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Dedekindringen* eine Verallgemeinerung des Basisexistenzsatzes aus der LA1, demzufolge jeder (endlich erzeugte) Vektorraum eine Basis besitzt.

Vertreterabhängig: Eine Konstruktion ist (vordergründig) *vertreterabhängig*, wenn sie es mit Objekten zu tun hat, die auf verschiedenerelei Weise dargestellt werden können, allerdings erst nach Fixierung einer solchen Darstellung anwendbar ist. Beispielsweise kann jede rationale Zahl als Bruch der Gestalt $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ dargestellt werden, aber diese Darstellung ist nicht eindeutig, da beispielsweise $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Ein einzelner Bruch ist also nur einer von vielen Repräsentanten für ein und dieselbe Zahl. Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \frac{p}{q} \mapsto \frac{q}{p} \\ \text{(ii)} \quad & \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \frac{p}{q} \mapsto p + q \end{aligned}$$

sind erst einmal vertreterabhängig, da sie Funktionswerte ausgehend von einer konkreten Repräsentation als Bruch vorschreiben. Oft ist es nötig zu zeigen, dass eine vordergründig vertreterabhängige Konstruktion in Wahrheit vertreterunabhängig ist, d.h. dass sie unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten stets dasselbe Objekt liefert. Beispielsweise ist die Vorschrift aus (i) vertreterunabhängig und ergibt somit eine wohldefinierte Abbildung $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$. Dagegen ist die Vorschrift aus (ii) vertreterabhängig, da beispielsweise $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ aber $2 + 3 \neq 4 + 6$. Daher ist, im Gegensatz zu (i), durch (ii) keine wohldefinierte Abbildung gegeben.

Wohldefiniert: Ein Objekt ist *wohldefiniert*, wenn es tatsächlich die Anforderungen an diejenige Sorte von Dingen, der angehört es per Definition sein soll, erfüllt. Diese Forderung schwingt in einer mathematischen Definition immer stillschweigend mit, ist unter Umständen jedoch nur mehr oder weniger offensichtlich erfüllt. Beispielsweise sind die „Funktionen“ aus [Aufgabe §4.8.2](#) allesamt nicht wohldefiniert, es liegen also gar keine Funktionen vor, sondern nur Terme, die den Anschein erwecken, Funktionen zu definieren (und die eventuell nach geringfügiger Modifikation auch wohldefinierte Funktionen ergäben).

Anhang C

Formelsammlung Logik und Mengen

C.1 Einige aussagenlogische Tautologien

Versuche bloß nicht, alle Formeln mit Wahrheitstafeln zu verifizieren! – das habe ich auch nie. Stattdessen empfehle ich, dass du dir, wenn du einmal in der Stimmung bist, eine Handvoll Formeln herauspickst und versuchst, sie dir intuitiv klarzumachen oder mithilfe der Beweistechniken aus Kapitel 2 zu beweisen. Auf diese Weise trainierst du logisches Denken und den Umgang mit Junktoren und Quantoren.

In den folgenden Formeln seien

- A, B, C drei beliebige Aussagen.
- \top eine wahre Aussage.
- \perp eine falsche Aussage.

Es gilt:

$$\begin{aligned} C \rightarrow (A \wedge B) &\leftrightarrow (C \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow B) \\ (A \vee B) \rightarrow C &\leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow A \rightarrow C \\ (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) &\leftrightarrow A \leftrightarrow B \\ (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) &\rightarrow A \leftrightarrow C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow C &\leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) &\leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &\leftrightarrow A \vee (B \vee C) \end{aligned} \quad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} A \wedge B &\leftrightarrow B \wedge A \\ A \vee B &\leftrightarrow B \vee A \\ A \leftrightarrow B &\leftrightarrow B \leftrightarrow A \end{aligned} \quad \text{(Kommutativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned} \quad \text{(Distributivgesetze)}$$

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\leftrightarrow (A \wedge B) \leftrightarrow A \\ A \rightarrow B &\leftrightarrow (A \vee B) \leftrightarrow B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \top && \text{(Wahres folgt aus Beliebigem)} \\ \perp &\rightarrow A && \text{(ex falso quodlibet)} \end{aligned}$$

$$A \wedge \neg A \leftrightarrow \perp$$

$$A \vee \neg A \leftrightarrow \top$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$A \leftrightarrow \neg\neg A$$

(Regel der doppelten Verneinung)

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(Regeln von De Morgan)

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$(A \wedge B) \rightarrow C \leftrightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow (B \vee C) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow B \vee B \rightarrow C$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A$$

(Peirce'sche Regel)

C.2 Einige prädikatenlogische Tautologien

In den folgenden Formeln seien

- A eine Aussage.
- $E(x)$ eine Eigenschaft.
- $R(x, y)$ eine zweistellige Relation.

Für die mit einem (*) markierten Aussagen sei außerdem angenommen, dass es mindestens ein Objekt vom Typ der Variablen x gibt. Bei der Russellschen Antinomie sei außerdem angenommen, dass beide Variablen x, y vom selben Typ sind.

$$A \rightarrow (\forall x : E(x)) \leftrightarrow \forall x : (A \rightarrow E(x))$$

$$(\exists x : E(x)) \rightarrow A \leftrightarrow \forall x : (E(x) \rightarrow A)$$

$$\forall x \forall y : R(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x : R(x, y)$$

$$\exists x \exists y : R(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x : R(x, y)$$

$$\exists x \forall y : R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x : R(x, y)$$

(Vertauschen von Quantoren)

$$(\forall x : E(x)) \wedge A \leftrightarrow^* \forall x : (E(x) \wedge A)$$

$$(\exists x : E(x)) \vee A \leftrightarrow^* \exists x : (E(x) \vee A)$$

$$(\exists x : E(x)) \wedge A \leftrightarrow \exists x : (E(x) \wedge A)$$

$$(\forall x : E(x)) \vee A \leftrightarrow \forall x : (E(x) \vee A)$$

$$\nexists x : E(x) \leftrightarrow \forall x : \neg E(x)$$

$$\neg(\forall x : E(x)) \leftrightarrow \exists x : \neg E(x)$$

(Quantorennegationsregeln)

$$A \rightarrow (\exists x : E(x)) \leftrightarrow^* \exists x : (A \rightarrow E(x))$$

$$(\forall x : E(x)) \rightarrow A \leftrightarrow^* \exists x : (E(x) \rightarrow A)$$

$$\nexists x \forall y : (R(x, y) \leftrightarrow \neg R(y, y)) \quad (\text{Russellsche Antinomie})$$

C.3 Regeln für \cap , \cup und \setminus

Dieser Abschnitt enthält eine Menge mengentheoretischer Gleichungen, die du während der Vorlesungen eher selten benötigen wirst. Statt sie alle auswendig zu lernen, empfehle ich dir, wenn du einmal in der Stimmung bist, eine Handvoll Formeln herauszupicken, sie durch Bilder und Beispiele zu veranschaulichen und schließlich zu beweisen. Vergleiche die mengentheoretischen Formeln auch einmal mit den logischen Tautologien und halte nach Verwandtschaften Ausschau. Auf diese Weise trainierst du deine mengentheoretische Intuition und mengentheoretisches Argumentieren. Solltest du später einmal einige Formeln benötigen, wirst du sie dir dann schnell selbst herleiten können.

Für die nachfolgenden Formeln seien

- X, Y, Z drei Mengen.
- Um die Komplemente „ $(-)^c$ “ zu interpretieren, sei außerdem eine gemeinsame Obermenge V von X, Y, Z fixiert.

Es gilt:

$$(X \subseteq Z) \text{ und } (Y \subseteq Z) \leftrightarrow X \cup Y \subseteq Z$$

$$(Z \subseteq X) \text{ und } (Z \subseteq Y) \leftrightarrow Z \subseteq X \cap Y$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \quad (\text{Assoziativgesetze})$$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

$$X \cup Y = Y \cup X \quad (\text{Kommutativgesetze})$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad (\text{Distributivgesetze})$$

$$X \subseteq Y \leftrightarrow X \cap Y = X$$

$$X \subseteq Y \leftrightarrow X \cup Y = Y$$

$$X \cap X^c = \emptyset$$

$$X \cup X^c = V \quad (\text{Komplementgleichungen})$$

$$X \subseteq Y \leftrightarrow Y^c \subseteq X^c$$

$$X^{cc} = X$$

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$$

$$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c \quad (\text{Regeln von De Morgan})$$

$$\begin{aligned}
 X \subseteq Y &\leftrightarrow X^c \cup Y = V \\
 X \not\subseteq Y &\leftrightarrow X \cap Y^c \neq \emptyset \\
 (X \cap Y) \setminus Z &= (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z) \\
 (X \cup Y) \setminus Z &= (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z) \\
 X \setminus (Y \cup Z) &= (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \\
 X \setminus (Y \cap Z) &= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) \\
 (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) &= (X \setminus Y) \dot{\cup} (Y \setminus X) && \text{(symmetrische Differenz)} \\
 X \setminus Y \subseteq Z &\leftrightarrow X \subseteq Y \cup Z && \text{(„Monus“-Eigenschaft)}
 \end{aligned}$$

C.4 Regeln für \bigcap_i und \bigcup_i

In den folgenden Formeln seien

- A eine beliebige Menge.
- I, J, K drei Indexmengen und $f : K \rightarrow I$ eine surjektive Abbildung.
- $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}, (M_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ drei Familien von Mengen.
- Damit die Komplemente „ $(-)^c$ “ Sinn ergeben, sei eine gemeinsame Obermenge V der X_i 's fixiert.

Für die mit einem (*) markierten Gleichungen sei außerdem angenommen, dass $I \neq \emptyset$.

$$(\forall i \in I : X_i \subseteq A) \leftrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$$

$$(\forall i \in I : A \subseteq X_i) \leftrightarrow A \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} M_{ij} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} M_{ij}$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} M_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{ij}$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} M_{ij} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{ij}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cap A =^* \bigcap_{i \in I} (X_i \cap A)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \cup A =^* \bigcup_{i \in I} (X_i \cup A)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap A)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup A = \bigcap_{i \in I} (X_i \cup A)$$

$\{M \in A \mid M \text{ ist eine Menge und } M \notin M\} \notin A$ (Russellsche Antinomie)

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} X_i &= \bigcap_{k \in K} X_{f(k)} \\ \bigcup_{i \in I} X_i &= \bigcup_{k \in K} X_{f(k)} \end{aligned} \quad \text{(Kommutativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} M_{ij} &= \bigcap_{g \in \text{Abb}(I, J)} \bigcup_{i \in I} M_{ig(i)} \\ \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} M_{ij} &= \bigcup_{g \in \text{Abb}(I, J)} \bigcap_{i \in I} M_{ig(i)} \end{aligned} \quad \text{(Distributivgesetze)}$$

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^c &= \bigcap_{i \in I} X_i^c \\ \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^c &= \bigcup_{i \in I} X_i^c \end{aligned} \quad \text{(Regeln von De Morgan)}$$

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \setminus A &=^* \bigcap_{i \in I} (X_i \setminus A) \\ \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \setminus A &= \bigcup_{i \in I} (X_i \setminus A) \\ A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) &= \bigcup_{i \in I} (A \setminus X_i) \\ A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) &=^* \bigcap_{i \in I} (A \setminus X_i) \end{aligned}$$

C.5 Regeln für \prod_i und \sqcup_i

Für die nachfolgenden Formeln seien

- A, B, C, D vier Mengen.
- $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I},$ und $(M_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ drei Mengenfamilien.

Für die mit einem (*) markierten Gleichungen sei außerdem angenommen, dass $I \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} \forall i \in I : X_i \subseteq Y_i &\rightarrow \prod_{i \in I} X_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i \\ \forall i \in I : X_i \neq \emptyset &\leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset \end{aligned} \quad \text{(Auswahlaxiom)}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} M_{ij} &=^* \prod_{j \in J} \bigcap_{i \in I} M_{ij} \\ \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in J} M_{ij} &\subseteq \prod_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{ij} \end{aligned}$$

$$\prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} M_{ij} = \bigcup_{g \in \text{Abb}(I, J)} \prod_{i \in I} M_{ig(i)}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \times A =^* \bigcap_{i \in I} (X_i \times A)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \times A = \bigcup_{i \in I} (X_i \times A)$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \dot{\cup} (C \times (B \setminus D))$$

$$(A \times B) \cup (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \dot{\cup} ((A \cap C) \times (B \cup D)) \dot{\cup} ((C \setminus A) \times D)$$

$$\exists i \in I : X_i \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i \neq \emptyset$$

$$\forall i \in I : X_i \subseteq Y_i \Leftrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i \subseteq \bigsqcup_{i \in I} Y_i$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} M_{ij} = \bigsqcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{ij}$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} M_{ij} =^* \bigsqcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} M_{ij}$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \sqcup A =^* \bigcup_{i \in I} (X_i \sqcup A)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \sqcup A =^* \bigcap_{i \in I} (X_i \sqcup A)$$

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) \setminus \left(\bigsqcup_{i \in I} Y_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} (X_i \setminus Y_i)$$

C.6 Regeln für Bilder und Urbilder

In den folgenden Formeln seien

- X, Y, Z drei Mengen.
- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwei Abbildungen.
- $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X und $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y .
- $A, U, V \subseteq X$ und $B, S, T \subseteq Y$ und $C \subseteq Z$ weitere Teilmengen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(A) &= g(f(A)) \\ (g \circ f)^{-1}(C) &= f^{-1}(g^{-1}(C)) \end{aligned} \quad \text{(Funktorialität)}$$

$$\begin{aligned}
 U \subseteq V &\rightarrow f(U) \subseteq f(V) \\
 S \subseteq T &\rightarrow f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(T) && (f \text{ und } f^{-1} \text{ sind inklusionserhaltend})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(A) \subseteq B &\leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(B) && (\text{Bild-Urbild-Adjunktion}) \\
 A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \\
 f(f^{-1}(B)) &= B \cap \text{im}(f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \\
 f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f(X_i) \\
 f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) &\subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(S \setminus T) &= f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T) \\
 f(U \setminus V) &\supseteq f(U) \setminus f(V)
 \end{aligned}$$

C.7 Einige natürliche Bijektionen

Dieser Abschnitt enthält eine Liste von „natürlichen Entsprechungen“ von Mengen. Es handelt sich dabei nicht um Gleichungen im strikten Sinne, weshalb ich kein Gleichheitszeichen = schreibe, jedoch können die Elemente der einen Menge jeweils „natürlich“ mit den Elementen der anderen Menge „identifiziert“ werden, d.h. es gibt eine naheliegende Bijektion zwischen beiden Mengen. Dies notiere ich mit dem Zeichen „ \cong “. Ich werde keine konkreten Bijektionen angeben. Versuche selbst einmal herauszufinden, inwiefern die Elemente der einen Menge jeweils den Elementen der anderen „entsprechen“.

Es seien

- X, Y, Z drei Mengen.
- I, J, K drei Indexmengen und $\sigma : K \rightarrow I$ eine bijektive Abbildung.
- $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$ und $(M_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ drei Mengenfamilien.
- Die Zeichen „0“, „1“ und „2“ sollen neben den Zahlen Null, Eins und Zwei auch jeweils eine beliebige null-, ein- bzw. zweielementige Menge bezeichnen.

Dann gibt es natürliche Bijektionen:

$$\text{Abb}(X, Y) \cong Y^X \quad (\text{Gleichwertigkeit von Abbildungen und Familien})$$

$$\text{Abb}\left(X, \prod_{i \in I} Y_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Abb}(X, Y_i) \quad (\text{Universelle Eigenschaft des Produkts})$$

$$\text{Abb}\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, Y\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Abb}(X_i, Y) \quad (\text{Universelle Eigenschaft des Koprodukts})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\cong \text{Abb}(X, 2) \\ \mathcal{P}(X \times Y) &\cong \text{Abb}(X, \mathcal{P}(Y)) \\ \text{Abb}(X \times Y, Z) &\cong \text{Abb}(X, \text{Abb}(Y, Z)) \end{aligned} \quad (\text{Currying})$$

$$\begin{aligned} 1 \times X &\cong X \\ (X \times Y) \times Z &\cong X \times (Y \times Z) \\ X \times Y &\cong Y \times X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \sqcup 0 &\cong X \\ (X \sqcup Y) \sqcup Z &\cong X \sqcup (Y \sqcup Z) \\ X \sqcup Y &\cong Y \sqcup X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \times X &\cong 0 && (\text{Absorbierende Null}) \\ X \times (Y \sqcup Z) &\cong (X \times Y) \sqcup (X \times Z) && (\text{Distributivgesetz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{Y \sqcup Z} &\cong X^Y \times X^Z \\ (X^Z)^Y &\cong X^{Y \times Z} \\ (X \times Y)^Z &\cong X^Z \times Y^Z \\ X^1 &\cong X \\ X^0 &\cong 1 \\ 1^X &\cong 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} M_{ij} &\cong \prod_{j \in J} \prod_{i \in I} M_{ij} \\ \bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} M_{ij} &\cong \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{i \in I} M_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} X_i &\cong \prod_{k \in K} X_{\sigma(k)} \\ \bigsqcup_{i \in I} X_i &\cong \bigsqcup_{k \in K} X_{\sigma(k)} \end{aligned}$$

$$X \times \left(\bigsqcup_{i \in I} Y_i \right) \cong \bigsqcup_{i \in I} (X \times Y_i)$$

$$\prod_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} X_{ij} \cong \bigsqcup_{g \in \text{Abb}(I, J)} \prod_{i \in I} X_{ig(i)}$$

$$X \sqcup_{i \in I} Y_i \cong \prod_{i \in I} X^{Y_i}$$

$$\left(\prod_{i \in I} X_i \right)^Y \cong \prod_{i \in I} X_i^Y$$

Anhang D

Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

Die Lösungen beinhalten keine Herleitungen und sind nur zur Kontrolle gedacht.

§D.1 **Lösung** (zu Aufgabe §1.5.3).

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	$A \wedge (B \rightarrow \neg(A \wedge B))$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
w	w	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	f	w

§D.2 **Lösung** (zu Aufgabe §3.7.2). Insgesamt liegen genau fünf verschiedene Objekte vor.

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 1, 3, 4, 5, 5\}$$

$$a = (a_i)_{i \in I} = (3, 4, 5, 6, 7)$$

$$\{a_i \mid i \in I\} = \{4, 3, 5, 6, 7\}$$

$$(4, 3, 5, 6, 7)$$

$$(2, 1, 3, 4, 5, 5)$$

§D.3 **Lösung** (zu Aufgabe §3.7.3).

$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$	×	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$	✓	$\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$	✓	$\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$	×
$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$	✓	$\mathbb{N} \subseteq \{\mathbb{N}\}$	×	$\{\mathbb{N}\} \in \{\mathbb{N}\}$	×	$\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{N}\}$	✓
$\{\mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$	×	$\{\mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$	✓	$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$	×	$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$	✓
$\emptyset \in \emptyset$	×	$\emptyset \subseteq \emptyset$	✓	$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$	✓	$\{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset)$	✓

§D.4 **Lösung** (zu Aufgabe §4.8.3).

	injektiv	surjektiv	bijektiv
a)	✓	×	×
b)	×	✓	×
c)	✓	✓	✓
d)	✓	✓	✓
e)	✓	✓	✓
f)	gdw. Y höchstens ein-elementig oder $X = \emptyset$	gdw. $Y \neq \emptyset$ oder $X = \emptyset$	gdw. Y Einermenge oder $X = \emptyset$

§D.5 **Lösung** (zu Aufgabe §5.4.1).

	refl.	trans.	sym.	antisym.	Ord.rel.	Äq.rel.
a)	✓	×	✓	×	×	×
b)	×	×	✓	×	×	×
c)	×	✓	×	✓	×	×
d)	✓	✓	×	✓	✓	×
e)	✓	✓	✓	×	×	✓

§D.6 **Lösung** (zu Aufgabe §5.4.2).

	n.o.b.	n.u.b.	kl. El.	gr. El.	min. El.	max. El.	Inf.	Sup.	
a)	×	✓	4	×	4	×	4	×	
b)	✓	✓	×	1	×	1	0	1	
c)	✓	✓	×	\mathbb{N}	alle Einermengen		\mathbb{N}	\emptyset	\mathbb{N}
d)	✓	✓	\emptyset	×	\emptyset	×	\emptyset	\mathbb{N}	
e)	✓	✓	×	×	×	×	×	×	

§D.7 **Lösung** (zu Aufgabe §6.6.1).

	assoziativ	kommutativ	neutrales Element	Monoid	Gruppe
a)	✓	✓	✓	✓	×
b)	×	×	×	×	×
c)	✓	✓	✓	✓	✓
d)	×	✓	×	×	×

§D.8 **Lösung** (zu Aufgabe §7.6.2). Werf einmal einen Blick in das hervorragende Ana1-Lehrbuch [AE06]. Dort wird die Aussage in Satz 2.17 bewiesen.

§D.9 **Lösung** (zu Aufgabe §7.6.4).

	n.o.b.	n.u.b.	monoton	monoton für hinreichend große n
a)	✓	✓	strikt fallend	strikt fallend
b)	×	×	×	×
c)	×	✓	×	strikt wachsend
d)	×	✓	×	×

Literaturverzeichnis

- [AE06] Herbert Amann und Joachim Escher. *Analysis I*. Birkhäuser, 2006.
- [Can95] Georg Cantor. „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre“. In: *Mathematische Annalen* 46 (1895).
- [Ded32] Richard Dedekind. *Gesammelte Werke*. Hrsg. von Robert Fricke, Emmy Noether und Øystein Ore. Bd. III. Vieweg, 1932.
- [Vel06] Daniel J. Velleman. *How To Prove It – A Structured Approach*. Cambridge University Press, 2006.

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen (mit oder ohne Null).
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen.
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen.
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen.
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen.
$n\mathbb{Z}$	Menge aller ganzzahligen Vielfachen von n .
$:=$	Per Definition gleich.
$:\Leftrightarrow$	Per Definition äquivalent zu.
\wedge	Und.
\vee	Oder.
\neg	Aussagenlogische Negation.
\rightarrow bzw. \Rightarrow	Aussagenlogische Implikation.
\leftrightarrow bzw. \Leftrightarrow	Aussagenlogische Äquivalenz.
\forall	Allquantor.
\exists	Existenzquantor.
\in	Element.
\subseteq	Teilmenge.
\subsetneq	Echte Teilmenge.
\emptyset	Leere Menge.
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge von X .
$(a_i)_{i \in I}$	Durch die Menge I indizierte Familie von Objekten a_i .
M^I	Menge der durch I indizierten Familien mit Einträgen aus M .
$M^{n \times m}$	Menge der $(n \times m)$ -Matrizen mit Einträgen aus M .
(x, y)	Geordnetes Paar bestehend aus zwei Objekten x, y .
\cap	Durchschnitt von Mengen.
\cup	Vereinigung von Mengen.
\setminus	Differenz zweier Mengen.
M^c	Komplement von M (in einer fixierten Obermenge).
\times	Kartesisches Produkt.
\sqcup	Disjunkte Vereinigung.
$f : X \rightarrow Y$ bzw. $X \xrightarrow{f} Y$	f ist eine Abbildung von X nach Y .
$x \mapsto t(x)$	Dem Objekt x wird das Objekt $t(x)$ zugeordnet.
$f(x)$	Funktionswert von f an der Stelle x .
$\text{Abb}(X, Y)$	Menge der Abbildungen von X nach Y .

\circ	Verkettung von Abbildungen.
id_X	Identität auf X .
$U \hookrightarrow X$	Inklusion der Teilmenge $U \subseteq X$.
$f^{-1}(x)$	Faser von x oder aber Funktionswert unter der inversen Abbildung (sofern diese existiert).
$\text{im}(f)$	Bild von f .
$f^{-1}(B)$	Urbild von B unter f .
$f(A)$	Bild von A unter f .
$f _A$	Einschränkung von f im Definitionsbereich.
f^A	Einschränkung von f im Wertebereich.
$m \mid n$	m teilt n .
\leq	Generisches Zeichen für eine Ordnungsrelation.
\min	Minimum, kleinstes Element einer geordneten Menge.
\max	Maximum, größtes Element einer geordneten Menge.
\inf	Infimum, größte untere Schranke.
\sup	Supremum, kleinste obere Schranke.
$(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$	Offenes, abgeschlossenes und halboffene Intervalle mit Endpunkten a und b .
$[x]$ bzw. \bar{x}	Äquivalenzklasse von x bzgl. einer Äquivalenzrelation.
X/\sim	Faktormenge modulo \sim .
$X \twoheadrightarrow X/\sim$	Projektion auf die Faktormenge.
$-x$	Additiv Inverses von x .
x^{-1}	Multiplikativ Inverses von x .
$\sum_{k=m}^n a_k$	Summe der a_m, \dots, a_n .
$\prod_{k=m}^n a_k$	Produkt der a_m, \dots, a_n .
M^\times	Einheitengruppe von M .
S_n	n -te symmetrische Gruppe.
\mathbb{R}	Um $\pm\infty$ erweiterte reelle Zahlen.
$ x $	Betrag von x .
$\text{sgn}(x)$	Vorzeichen von x .
$d(x, y)$	Abstand von x zu y .
$\mathbb{B}_r(a)$	Offener Ball mit Radius r um den Punkt a .
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Limes der Folge der a_n .
$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$	Die a_n 's konvergieren gegen a .

Index

- Abbildung, 71
- Abbildungsvorschrift, 72
- abelsche Gruppe, 129
- abgeschlossene Teilmenge (bzgl. einer Verknüpfung), 116
- Abstandsfunktion, 136
- Äquivalenz (von Aussagen), 9
- Äquivalenzbeweis, 27
- Äquivalenzklasse, 107
- Äquivalenzrelation, 105
- Allrelation, 94
- antisymmetrische Relation, 94
- assoziative Verknüpfung, 116
- Auswahlaxiom, 66
- Axiom, 23

- Beispiel (in einem Beweis), 36
- beliebig, 37
- beschränkt (Ordnungstheorie), 103
- beschränkte Folge, 142
- Betrag, 135
- Beweis, 23
- bijektiv, 84
- Bild, 79
- Bivalenzprinzip, 16

- De Morgansche Regeln, 47
- Definitionsbereich, 71
- Differenzmenge, 62
- direkter Beweis, 25
- disjunkte Mengen, 67
- Disjunkte Vereinigung, 68
- Disjunktion, 7
- divergente Folge, 144
- Dreiecksungleichung (in metrischen Räumen), 136
- Dualität zwischen Syntax und Semantik, 94
- Dualitätsprinzip für geordnete Mengen, 104
- Durchschnitt von Mengen, 62

- Eindeutigkeitsbeweis, 39
- Einermenge, 57
- Einheit (bei einer Verknüpfung), 121
- Einheitengruppe, 130

- Einschränkung einer Abbildung, 81
- Einschränkung einer Relation, 93
- Einschränkung einer Verknüpfung, 116
- Einselement, 124
- Einträge einer Familie, 60
- Epsilontik, 145
- Erweiterte Zahlengerade, 134
- eventually (Folgenverhalten), 143
- ex falso quodlibet, 44
- Exponent, 125
- Extension (einer Eigenschaft), 52
- Extensionalitätsaxiom, 52

- Faktor, 124
- Faktormenge, 108
- fallende Folge, 142
- Fallunterscheidung (in einem Beweis), 36
- Familie, 60
- Faser, 79
- feinere Relation, 93
- Folge, 141
- Fortsetzung, 81
- freie Variable, 5
- Funktion, 71
- Funktionsterm, 72
- für hinreichend große n , 143

- gebundene Variable, 5
- Gegenbeispiel, 40
- Geordnete Menge, 97
- Graph (einer Abbildung), 71
- Grenzwert, 144
- größere Relation, 93
- größtes Element, 101
- Gruppe, 129

- Halbordnung, 97
- Hasse-Diagramm, 99
- Hinrichtung, 27

- Identität, 77
- Implikation, 8
- Indexmenge, 60
- indirekter Beweis, 41

- induzieren, 157
- Infimum, 103
- injektiv, 83
- Inklusion (einer Teilmenge), 79
- innerer Punkt, 139
- intangibile, 66
- Interpretation (Logik), 17
- Intervall, 101
- inverse Funktion, 86
- inverses Element, 121
- invertierbare Abbildung, 86
- Involution, 123

- Junktor, 6

- kanonisch, 157
- Kartesisches Produkt, 64
- Kennzeichnung, 15
- kleinstes Element, 101
- Kobild, 111
- kommutative Verknüpfung, 116
- Komplement, 62
- Kongruenz modulo n , 106
- Konjunktion, 7
- konstante Abbildung, 80
- Kontraposition, 41
- konvergente Folge, 144

- Leere Abbildung, 79
- Leere Familie, 62
- Leere Menge, 57
- Leere Relation, 94
- Leere Summe, 128
- Leeres Produkt, 128
- Limes, 144

- mathematisches Objekt, 1
- Matrix, 65
- maximales Element, 101
- Maximum, 101
- Menge, 52
- Mengenfamilie, 64
- Mengensystem, 59
- Metrischer Raum, 136
- minimales Element, 101
- Minimum, 101
- modulo, 157
- Modus Ponens, 26

- Monoid, 120
- Monotonie (von Folgen), 142

- Negation, 8
- Negation von Quantoren, 48
- Nenner, 127
- neutrales Element, 119
- nichtkonstruktiver Beweis, 45
- Nullelement, 124

- OBdA, 157
- Offener Ball, 138
- Ordnungsrelation, 97

- Parameter, 5
- Partielle Ordnung, 97
- Partition, 111
- Permutation, 131
- Potenz, 125
- Potenzmenge, 58
- Prädikat, 10
- Präordnung, 98
- Produkt von Mengen, 64
- Projektion (auf eine Faktormenge), 108
- Punkt (in einem metrischen Raum), 136

- Quotientenmenge, 108

- reflexive Relation, 94
- Regel von Hemd und Jacke, 124
- Relation, 91
- Relation (Logik), 10
- Repräsentant, 107
- Repräsentantensystem, 108
- Restriktion, 81
- Retraktion, 86
- Ringschluss, 33
- Rückrichtung, 27
- Russellsche Antinomie, 43

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten, 44
- Satz vom Widerspruch, 42
- Schlussregel, 22
- Schnittmenge, 62
- Schranke (Ordnungstheorie), 103
- Signum, 135
- Substitutionsprinzip, 29
- Summand, 124

- Supremum, 103
surjektiv, 83
Symmetrische Gruppe, 131
symmetrische Relation, 94
System von Mengen, 59
- Tautologie, 19
Teiler, 91
Teilmenge, 54
Term, 3
tertium non datur, 44
Totalordnung, 100
transitive Relation, 94
Tupel, 61
Typ, 1
- Umgebung (Metrische Räume), 139
Umkehrabbildung, 86
Umkehrrelation, 92
Urbild, 79
- vacuous truth, 57
Variable, 1
Vereinigungsmenge, 62
vergleichbar (Ordnungstheorie), 100
Verkettung von Abbildungen, 75
Verknüpfung, 114
Vertreter, 107
Vertretersystem, 108
vertreterunabhängig, 158
Vielfaches, 91
- wachsende Folge, 142
Wahrheitstafel, 17
Wertebereich, 71
Widerlegung, 40
Widerspruch, 41
Widerspruchsbeweis, 42
wohldefiniert, 159
- Zähler, 127
Zuordnungsvorschrift, 72

Griechisches Alphabet

	Majuskel	Minuskel	Deutsches Pendant
Alpha	Α	α	A
Beta	Β	β	B
Gamma	Γ	γ	G
Delta	Δ	δ	D
Epsilon	Ε	ε, ϵ	E
Zeta	Ζ	ζ	Z
Eta	Η	η	E
Theta	Θ	ϑ, θ	Th
Iota	Ι	ι	I
Kappa	Κ	κ	K
Lambda	Λ	λ	L
My	Μ	μ	M
Ny	Ν	ν	N
Xi	Ξ	ξ	X
Omikron	Ο	$ο$	O
Pi	Π	π, ϖ	P
Rho	Ρ	ϱ, ρ	R
Sigma	Σ	σ, ς	S
Tau	Τ	τ	T
Ypsilon	Υ	υ	Y
Phi	Φ	φ, ϕ	Ph
Chi	Χ	χ	Ch
Psi	Ψ	ψ	Ps
Omega	Ω	ω	O