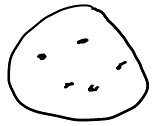
Mengen und Familien

Wiederholung:

Def: (Cantor, 1895) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung bestimmter Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Elemente nennen wir Elemente der Menge M.

Notation:
- $M_1 = \{\text{Anja}, \text{Bob}, \text{Charlie}\}$



- $M_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad M_4 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- $M_3 = \{x \mid x \text{ ist eine Natürliche Zahl}\}$ (Extension einer Eigenschaft)

Wir schreiben $m \in M$, falls m Element von M ist. Andernfalls $m \notin M$.

Bsp:
- $2 \in M_2$, $2 \in M_3$
- 2, Sonja $\notin M_1$

Notation: Um Aussagen über Mengen zu treffen, benutzen wir folgendes:
- „Für <u>alle</u> Elemente m von M gilt Eigenschaft E":

  $\forall m \in M : E(m)$
- „Es existiert (min.) ein Element m von M, welches E erfüllt":

  $\exists m \in M : E(m)$

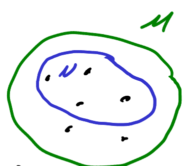
$\exists!$ „genau 1"

Def: Seien M, N Mengen.
- M und N heißen gleich, falls (Extensionalitätsaxiom)

  $\forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$

  Schreibe $M = N$

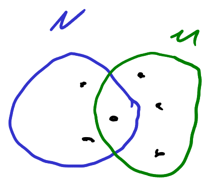
Def: Seien M, N Mengen
- N ist eine Teilmenge der Menge M, falls



  $\forall n \in N : n \in M$ (alle $n \in N$ sind auch in M)

  Schreibe $N \subseteq M$

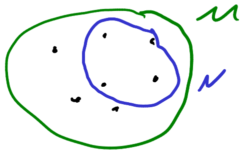
- Falls N <u>keine Teilmenge</u> von M ist, d.h.



  $\exists n \in N : n \notin M$, schreibe $N \nsubseteq M$
- N ist echte Teilmenge von M falls $N \subseteq M$ und ein Element in M existiert,

welches nicht in N enthalten ist.

$N \subseteq M \wedge \exists m \in M : m \notin N$ Schreibe $N \subsetneq M$



Vorsicht! Es gibt in der Literatur manchmal abweichende Notationen. Z.B. $\subset$ „echte Teilmenge"
$\subseteq$ „Teilmenge"

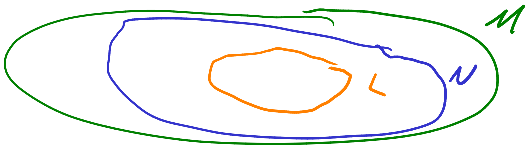
$\subsetneq$

Satz: Seien L, M, N Mengen. Es gilt:

a) $M \subseteq M$ (Reflexivität)

b) Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $M = N$ (Antisymmetrie)

c) Aus $L \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $L \subseteq M$ (Transitivität)



Bew: a) Für alle $m \in M$ gilt per se schon $m \in M \Rightarrow M \subseteq M$

b) z.z.: M und N haben die selben Elemente

„zu zeigen"

Sei x ein beliebiges Element

- Ist $x \in M$, so folgt wegen $M \subseteq N$ schon $x \in N$
- Ist $x \in N$, so folgt wegen $N \subseteq M$ schon $x \in M$

$\Rightarrow M = N$

c) Sei $x \in L$

$L \subseteq N \rightarrow x \in N$

$N \subseteq M \rightarrow x \in M$

$\Rightarrow L \subseteq M$

Bem: Gleichheit von Mengen wird üblicher Weise wie in (b) gezeigt D.h.

$M \subseteq N$: wähle $x \in M$ und folgere, dass $x \in N$ liegen muss, d.h. $x \in N$

$N \supseteq N$: wähle $x \in N$ und folgere $x \in M$

Bsp: a) $\{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N} : x \cdot y = y\} = \{1\}$

„$\subseteq$": Sei x in der linken Menge enthalten.

D.h. Für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt $x \cdot y = y$

$\overset{\frac{1}{y}}{\Rightarrow} \quad x \cdot \frac{y}{y} = \frac{y}{y}$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\Rightarrow \quad x \in \{1\}$

„$\supseteq$": $x \in \{1\} \to x = 1$

$\to \forall y \in \mathbb{N} : x \cdot y = y$

$\to$ x ist in der linken Menge enthalten.

b) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 1\}$

„$\subseteq$": $x \in \{1, 2, 3\} \to x = 1, x = 2,$ oder $x = 3$

$\to x \in \{1, 2, 3, 1\}$

„$\supseteq$": $x \in \{1, 2, 3, 1\} \to x = 1, x = 2, x = 3,$ oder $x = 1$

$\to x \in \{1, 2, 3\}$

Bem: Wir sehen: Mengen unterscheiden nicht in Reihenfolge oder Zählung.

Def: Die Menge, die keine Elemente besitzt, heißt <u>leere Menge</u>, geschrieben $\emptyset$.

Bem:
- seltene Schreibweise: $\{\}$
- $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$
- Es gibt genau eine leere Menge, denn:

  Angenommen A sei eine weitere Menge ohne Elemente, dann haben A und $\emptyset$ die gleichen Elemente (Daher „<u>die</u> leere Menge").

Bsp: Es gilt $\{x \mid \forall y \in \mathbb{N}$ sodass $x \cdot y = y$ und $x \neq 1\} = \emptyset$

„$\subseteq$": Widerspruchsbeweis: Angenommen x ist in der linken Menge

Für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt $x \cdot y = y \overset{\S 0.}{\Leftrightarrow} x = 1$

aber $x \neq 1$. Daher folgt $\nexists$ x in der linken Menge.

$\Rightarrow$ Die linke Menge ist in $\emptyset$ enthalten, weil für alle Elemente der linken Menge gilt, dass sie auch in $\emptyset$ sind.

„$\supseteq$" $\emptyset$ enthält keine Elemente, daher gilt für beliebige Mengen M, $\emptyset \subseteq M$

Formal: $\forall x \in \emptyset : x \in M$ („Vacous Truth")

Daraus folgt, $\emptyset$ ist Teilmenge der linken Menge

Bem: • „Vacous Truths": Aussagen des Typs $\forall x \in \emptyset : E(x)$

$\forall x : (x \in \emptyset \to E(x))$

sind immer wahr, egal E ist.

<u>Bsp</u>: • „Alle rosa Elefanten können fliegen"

• „Alle meine Geschwister sind Gürteltiere"
(Tim 18, Einzelkind)

• Mengen können Mengen als Elemente enthalten
z.B. Sei A Menge

$A \in \{A\}$, $\{A\} \in \{\{A\}\}$, $A \notin \{\{A\}\}$,
$A \in \{A, \{A\}\}$, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$

• Für alle Mengen A gilt: $\emptyset \subseteq A$, denn $\forall x : x \in \emptyset \to x \in A$

Definition: Die <u>Potenzmenge</u> einer Menge M ist definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

Bem: • $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$

• man kann zeigen: hat M n elemente, so besitzt $\mathcal{P}(M)$
2^n Elemente.

<u>Familien</u> (Sammlung mit Stellen)

Def: 1) Eine <u>Familie</u> $(a_i)_{i \in I}$ ist eine Sammlung von Objekten
a_i indiziert über eine Menge I.
I wird die „<u>Indexmenge</u>" der Familie genannt.

2) Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie. Ist A eine Menge mit
$a_i \in A$ für alle $i \in I$, so nennt man $(a_i)_{i \in I}$ <u>eine (durch</u>
<u>I indizierte) Familie mit Einträgen aus A</u>, oder
<u>A-wertige Familie.</u>

Die Menge aller A-wertigen Familien wird A^I notiert.

$$A^I := \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : a_i \in A\}$$

Bsp:
- I := Sitzplätze im Hörsaal
  A := Personen im Hörsaal
  a_i := Person, welche auf Platz I sitzt.
- Familien mit Indexmenge $I = \mathbb{N}$ heißen <u>Folgen</u>.
- Informatik: Arrays sind Familien mit Indexmenge
  $\{0, 1, \dots, k_1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, k_n\}$
  (bei Arrays mit n dimensionen und Länge k_i in der i-ten Dimension)

Def: Zwei Familien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i \in I}$ mit gleicher Indexmenge I heißen gleich, falls

$$\forall i \in I : \ a_i = b_i$$

Bsp:
- $(a_i)_{i\in I}$ Sitzplatzbelegung im Raum von oben.
  $(b_i)_{i\in I}$ —— " —— nachdem zwei Personen den Platz getauscht haben
  $(a_i)_{i\in I} \neq (b_i)_{i\in I}$, denn es existieren $i, j \in I$ mit
  $a_i \neq b_i$ und $a_j \neq b_j$.

  Familien tragen mehr Struktur als Mengen.

Def: Sei $n \in \mathbb{N}$. Familien $(a_i)_{i\in I}$ mit $I = \{1, \dots, n\}$ nennt man <u>n-Tupel</u>. Schreibe $(a_1, \dots, a_n)$

Ist A eine Menge, so ist die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus A:

$$A^n := \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$$

Bem/Bsp:
- $\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind gleich, wenn $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$

$$\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

aber: $(1, 2, 3, 1) \neq (1, 2, 3)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Aus einer Familie wird auf einfache Weise eine Menge:

  $(a_i)_{i\in I}$ Hörsaalbelegung

  $A := \{a_i \mid i \in I\}$ Personen im Hörsaal

- Die Familie mit Indexmenge $\emptyset$ ist die leere Familie. Es gibt nur eine, schreibe auch $\emptyset$.

- Eine Familie, deren Einträge Mengen sind, nennen wir Mengenfamilie.

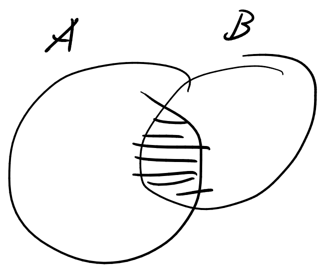
  Bsp: $(\{1, \dots, n\})_{n\in\mathbb{N}}$

„Mengen-Bastelstunde"

Def: Seien A, B Mengen. Wir definieren:

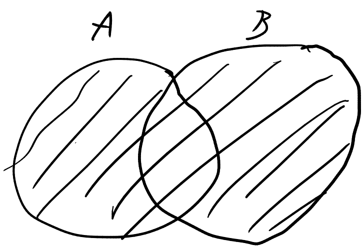
- Den Schnitt von A und B

  $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



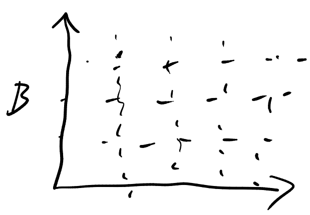
- Die Vereinigung von A und B

  $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



- Das Kartesische Produkt von A und B

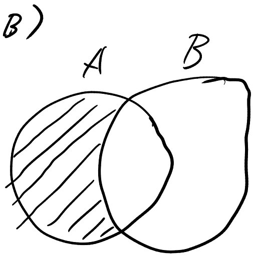
  $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$



- Das Komplement von B in A (oder Differenzmenge von A und B)

  $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ „A ohne B"

  (selten: $A - B$)



- Für eine Familie von Mengen $(M_i)_{i\in I}$ definieren wir

  $\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$

  Falls $I = \{1, \dots, n\}$, $= M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{ x \mid \exists i \in I : x \in M_i \} \quad = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

$$\prod_{i\in I} M_i := \{ \text{Familien } (x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \; x_i \in M_i \} = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$$

- Zwei Mengen heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$
- Eine Familie von Mengen $(M_i)_{i\in I}$ nennen wir „paarweise disjunkt", falls je zwei der M_is disjunkt sind:

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i,j \in I, \; i \neq j.$$

Bem: (Analogie zur Aussagenlogik):

Mengenoperationen	$M \cap N$	$M \cup N$	$\bigcup_{i\in I} M_i$	$\bigcap_{i\in I} M_i$
Logik	$\wedge$	$\vee$	$\exists$	$\forall$

Achtung: Mengenoperationen werden auf Mengen, logische Operatoren auf Aussagen angewandt. Immer unterscheiden.