Die Sprache der Prädikatenlogik

Luka Thomé

4.10.2023

Über mich

- Luka
- 1 Jahr Physik + 5 Jahre Mathe studiert,
  ohne Masterarbeit abgebrochen, nun planlos
- Sonst so: Klavier, Musikkomposition, Lyrik und Prosa schreiben
- Filme, die ich mag:
  - The Big Lebowski
  - Barry Lyndon
- Videospiele, die ich mag:
  - Wind Waker
  - Nier Automata
- Dinge, die ich nicht mag:
  - Menschen, die sich über ihren Konsum definieren
  - Konkurrenzdenken

Literaturtipps

- Unser Vorkursskript!
- Daniel Velleman, How To Prove It
- Bei weiterem Interesse an mathematischer Logik:
  Dirk Hoffmann, Grenzen der Mathematik

Leibniz' *characteristica universalis*

Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ ist eine *Primzahl*, wenn gilt:

Die einzigen Teiler von p sind 1 und p selbst.

$$\forall q \in \mathbb{N}: \quad (\exists k \in \mathbb{N}: \; k \cdot q = p) \rightarrow (q = 1 \; \vee \; q = p)$$

Vortrag heute

1. Einleitung
2. Aussagenlogik
3. Prädikatenlogik
4. (Wahrheitswerte)

Variablen

„Sei n eine natürliche Zahl."

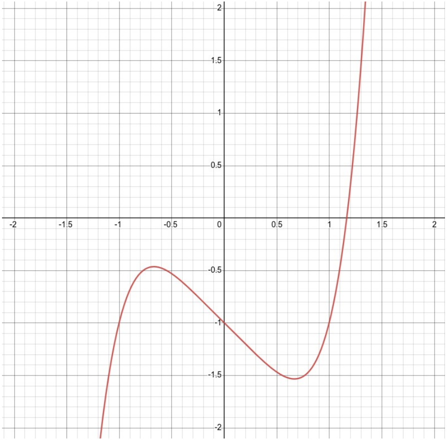
„Seien n, m, k drei ganze Zahlen."

„Seien x, y zwei reelle Zahlen mit $x^2 + y^2 = 2$."

Bedeutungszuweisung

$$x^5 - x - 1 = 0 \qquad\qquad (x \text{ reelle Zahl})$$

$$f(x) = x^5 - x - 1$$



Quelle: `https://www.desmos.com/calculator`

Bedeutungszuweisung

„Sei ξ die eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^5 - x - 1 = 0$."

„Es ist $\xi > 1$".

$\xi :=$ (Die eine reelle Lösung von $x^5 - x - 1 = 0$)

„Die Kreizahl π ist die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion."

$\pi := \min\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \sin(x) = 0\}$

Abschnitt 2: Aussagenlogik

Aussagen-Beispiele

$A :=$ „Heute ist Mittwoch“

$B :=$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden“.

$C :=$ „$1 + 1 = 2$“.

$D :=$ „$2 + 2 = 5$“.

Konjunktion

(A, B Aussagen)

$$A \wedge B \qquad\qquad \text{(lies: „}A\text{ und }B\text{“)}$$

$A :=$ „Heute ist Mittwoch.“ $\qquad B :=$ „Es gibt außerirdisches Leben.“

$A \wedge B =$ „Heute ist Mittwoch und es gibt außerirdisches Leben.“

„Es gibt außerirdisches Leben, aber Zeitreisen sind unmöglich.“

Disjunktion

(A, B Aussagen)

$$A \vee B \qquad\qquad \text{(lies: „}A\text{ oder }B\text{“)}$$

$A :=$ „Ich geh nach Hause.“ $\qquad B :=$ „Wir trinken noch einen.“

$A \vee B =$ „Ich geh nach Hause oder wir trinken noch einen.“

Negation

(A Aussage)

$$\neg A \qquad\qquad \text{(lies: „nicht } A\text{“)}$$

$A :=$ „Heute ist Montag.“

$\neg A =$ „Heute ist nicht Montag.“

Weitere Beispiele

$$A := \text{„Es gibt außerirdisches Leben."}$$

$$\neg A = \text{„Es gibt kein außerirdisches Leben."}$$

$$B := \text{„}2 + 2 = 5\text{"}$$

$$\neg B = \text{„}2 + 2 \neq 5\text{"}$$

Implikation

(A, B Aussagen)

$$A \to B \qquad \text{(lies: „}A\text{ impliziert }B\text{“)}$$

$A :=$ „Heute ist Mittwoch.“ $\qquad B :=$ „Ich habe früher Feierabend.“

$A \to B =$ „Wenn heute Mittwoch ist, hab ich früher Feierabend.“

$A \to A =$ „Falls heute Mittwoch ist, ist heute Mittwoch.“

Weitere Beispiele

„Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, gibt es außerirdisches Leben."

„Unter der Annahme $n + 2 = 5$ ist bereits $n = 3$."

Weitere Lesarten für „$A \to B$":

- „B folgt aus A".
- „B ist eine Konsequenz von A".
- „A ist eine hinreichende Bedingung für B".
- „B ist eine notwendige Bedingung von A".

Äquivalenz

(A, B Aussagen)

$A \leftrightarrow B$ (lies: „A ist äquivalent zu B“)

$A :=$ „Heute ist Mittwoch.“ $B :=$ „Morgen ist Donnerstag.“

$A \leftrightarrow B =$ „Genau dann ist heute Mittwoch, wenn morgen Donnerstag ist.“

„A gdw. B“

„Eine reelle Zahl x ist dann und nur dann negativ, wenn $-x$ positiv ist."

$$A \leftrightarrow B \quad \hat{=} \quad (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

Zusammenfassung

Junktor	Formelzeichen	Informatik
Und	$\wedge$	AND
Oder	$\vee$	OR
Negation	$\neg$	NOT
Implikation	$\rightarrow$	
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	
Entweder-Oder	$\dot{\vee}$	XOR
	$A \mid B$	NAND
Weder noch	$A \downarrow B$	NOR

Verschachtelte Aussagen

$$A \lor \neg B \to \neg C \land D \qquad \text{(unschön)}$$

$$(A \lor \neg B) \to (\neg C \land D) \qquad \text{(besser)}$$

$$A \lor \neg B \quad \to \quad \neg C \land D \qquad \text{(auch hübsch)}$$

Abschnitt 3: Prädikatenlogik

Terme

$t(x_1, \ldots, x_n)$ (lies: „t von $x_1, \ldots, x_n$“)

t

Beispiele

$$y(x) := x^5 - x - 1 \qquad \text{(für } x \text{ eine reelle Zahl)}$$

$$p(x, y) := x^2 + 3 \cdot (xy - 5) \qquad \text{(für } x, y \text{ reelle Zahlen)}$$

$$2 + 2 \qquad 6{,}02 \cdot 10^{23}$$

Das Geburtsjahr von m (für einen Menschen m)

$$A \vee \neg B \quad \rightarrow \quad \neg C \wedge D \qquad \text{(für } A, B, C, D \text{ Aussagen)}$$

Prädikate

$E(X) :=$ „X wurde in Deutschland erfunden.“

(X kulinarische Errungenschaft)

- Nullstellige Prädikate sind **Aussagen**.
- Einstellige Prädikate heißen auch **Eigenschaften**.
- Zweistellige Prädikate heißen auch **Relationen**.

Weitere Beispiele

$G(m)$	$:\Leftrightarrow$	„m ist eine gerade Zahl."	(m natürliche Zahl)
$L(\sigma, \theta)$	$:\Leftrightarrow$	„σ ist verliebt in ϑ."	(σ, ϑ Menschen)
		$x \leq y$	(x, y reelle Zahlen)

Mengen

Cantor 1895: „Unter einer **Menge** M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen."

$$\begin{aligned} x \in M \quad &:\Leftrightarrow \quad x \text{ ist ein Element von } M \\ x \notin M \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg(x \in M) \end{aligned}$$

$$\sqrt{3} \in \mathbb{R} \qquad \text{aber} \qquad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Extension einer Eigenschaft

(E Eigenschaft)

$$\{x \mid E(x)\} \qquad \text{(lies: „Menge aller } x\text{, für die gilt: } E(x)\text{“)}$$

Für ein Objekt a gilt:

$$a \in \{x \mid E(x)\} \quad \leftrightarrow \quad E(a)$$

$$X := \{M \mid M \text{ ist ein Matheprof}\}$$

$$\text{Robert Scheichl} \in X$$

Zahlbereiche

$\mathbb{N} := \{n \mid n \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$

$\mathbb{Z} := \{n \mid n \text{ ist eine ganze Zahl}\}$

$\mathbb{Q} := \{\text{rationale Zahlen}\}$

$\mathbb{R} := \{\text{reelle Zahlen}\}$

$\mathbb{C} :=$ Menge der komplexen Zahlen.

Allquantor

$E(x)$ Eigenschaft.

$$\forall x: \ E(x) \qquad\qquad \text{(lies: „Für jedes } x \text{ gilt } E(x)\text{“)}$$

Für eine Menge M schreibt man:

$$\begin{array}{c} \forall x \in M: \ E(x) \\ \text{(lies: „Für jedes } x \text{ aus } M \text{ gilt } E(x)\text{“)} \end{array} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x: \ (x \in M \ \rightarrow \ E(x))$$

Beispiele

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n \text{ ist gerade oder } n \text{ ist ungerade}$$

$$\begin{aligned} M &:= \{\text{Bewohner meiner WG}\} \\ E(x) &:= \text{„}x\text{ ist heute früh aufgestanden.“} \end{aligned}$$

$$\forall x \in M : E(x) \quad = \quad \begin{array}{l} \text{„Jeder Bewohner meiner WG} \\ \text{ist heute früh aufgestanden.“} \end{array}$$

Existenzquantor

$E(x)$ Eigenschaft.

$$\exists x : \; E(x) \qquad\qquad \text{(lies: „Es gibt ein } x\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)}$$

Für eine Menge M schreibt man:

$$\begin{array}{r} \exists x \in M : \; E(x) \\ \text{(lies: „Es gibt ein } x \text{ in } M\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)} \end{array} \;:\Leftrightarrow\; \exists x : (x \in M \;\wedge\; E(x))$$

Beispiele

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad n^2 = 81$$

$$\begin{aligned} M &:= \{\text{Bewohner meiner WG}\} \\ E(x) &:= \text{„}x \text{ ist heute früh aufgestanden.“} \end{aligned}$$

$$\exists x \in M : E(x) \quad = \quad \text{„Mindestens ein Bewohner meiner WG ist heute früh aufgestanden.“}$$

E Eigenschaft, M Menge.

$$\begin{array}{rcl} \nexists x : \ E(x) & & \\ & :\Leftrightarrow & \neg(\exists x : \ E(x)) \\ \text{(lies: „Es gibt kein } x \ldots \text{“)} & & \end{array}$$

$$\nexists x \in M : \ E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \neg(\exists x \in M : \ E(x))$$

Zum Beispiel:

$$\nexists n \in \mathbb{N} : \ n^2 = 5$$

$$\neq \qquad \notin \qquad \nexists$$

Eindeutigkeitsquantor

$E(x)$ Eigenschaft.

$$\exists! x : \; E(x) \qquad \text{(lies: „Es gibt genau ein } x\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)}$$

Für eine Menge M schreibt man:

$$\exists! x \in M : \; E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists! x : (x \in M \; \wedge \; E(x))$$

(lies: „Es gibt genau ein x in M,
für das $E(x)$ gilt“)

Beispiele

$\exists! n \in \mathbb{N}: \quad 32 + n = 101$

$\exists! x \in \mathbb{R}_{\geq 0}: \quad x^2 = 3$

„Genau ein Bewohner meiner WG ist heute früh aufgestanden.“

Zerlegung des Eindeutigkeitsquantors

„Es gibt genau ein. . . “ $\Leftrightarrow$ „Es gibt mindestens ein. . . “
$+$ „Es gibt höchstens ein. . . “

$$\exists ! x : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \underbrace{\exists x : E(x)}_{\text{mindestens ein...}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall y, z : \quad (E(y) \wedge E(z)) \rightarrow \ y = z}_{\text{höchstens ein...}}$$

oder alternativ:

$$\exists ! x : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \underbrace{\exists x : \quad (E(x)}_{\text{„Es gibt ein } x\text{...}} \ \wedge \ \underbrace{\forall y : \quad E(y) \rightarrow \ y = x)}_{\text{...und } x \text{ ist das einzige...“}}$$

Zusammenfassung

Quantor	Formelzeichen	Lesbar als
Allquantor	$\forall$	Für alle
Existenzquantor	$\exists$	Es existiert ein
Eindeutigkeitsquantor	$\exists!$	Es existiert genau ein

Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ ist eine *Primzahl*, wenn gilt:

Die einzigen Teiler von p sind 1 und p selbst.

$$\forall q \in \mathbb{N} : \quad (q \text{ ist ein Teiler von } p) \quad \rightarrow \quad (q = 1 \text{ oder } q = p)$$

$$\forall q \in \mathbb{N} : \quad (\exists k \in \mathbb{N} : \ k \cdot q = p) \quad \rightarrow \quad (q = 1 \ \vee \ q = p)$$

Gebundene Variablen

$$\exists x \in \mathbb{R} : \; x^5 - x - 1 = 0$$

$$\int_0^1 (x-a)^2 \; dx$$

$$\{x \mid x^5 - x - 1 = 0\}$$

Verschachtelte Quantoren

$n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lcl} & m < n & \\ \rightsquigarrow & \exists m : (m < n) & \\ \rightsquigarrow & \forall n : (\exists m : (m < n)) & \text{bzw.} \\ & \forall n : \ \exists m : \ m < n & \text{bzw.} \\ & \forall n \ \exists m : \ m < n & \end{array}$$

Verkürzte Notation bei identischen Quantoren:

$$\begin{array}{lcl} \forall n \ \forall m : \ m < n & \Leftrightarrow: & \forall n, m : \ m < n \\ \exists n \ \exists m : \ m < n & \Leftrightarrow: & \exists m, n : \ m < n \end{array}$$

Reihenfolge beachten!

$$M(x,y) \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ ist (biologische) Mutter von } y \quad (\text{für Menschen } x, y)$$

$\forall y \; \exists x : \; M(x,y) \quad \Leftrightarrow$ „Für jeden Menschen y gilt, dass es einen Menschen x gibt, der Mutter von y ist."

$\exists x \; \forall y : \; M(x,y) \quad \Leftrightarrow$ „Es gibt einen Menschen x derart, dass für jeden Menschen y gilt: x ist die Mutter von y."

Abschnitt 4: Wahrheitswerte

Regeln für Wahrheitswerte

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

A	$\neg A$
w	f
f	w

???	$\forall x : E(x)$	$\exists x : E(x)$

Wahrheitstafel des Implikationspfeils

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

„Wenn ich verschlafe komme ich zu spät zur Uni.“

„Wenn der Döner in Deutschland erfunden wurde,
ist 529 eine Quadratzahl.“

Rechnen mit Wahrheitstafeln

A, B Aussagen.

Aufgabe: Berechne die Wahrheitswerte von

$$(A \wedge B) \; \leftrightarrow \; (\neg A \vee B)$$

in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B.

Rechnen mit Wahrheitstafeln

$$(A \wedge B) \;\leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$$

A	B	$A \wedge B$	$\leftrightarrow$	$\neg A$	$\vee\ B$
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	w
f	f	f	f	w	w

Lösung:

A	B	$(A \wedge B) \;\leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Tautologie: „Wenn heute Mittwoch ist, ist heute Mittwoch.“ $(A \to A)$

Unerfüllbar: „Die Rose ist welk und die Rose ist nicht welk.“ $(A \wedge \neg A)$

Erfüllbar, aber keine Tautologie:
„Das Mensaessen diese Woche schmeckt überraschend gut.“

Ende