

Beweistechniken

Luka Thomé

5.10.2023

- 1 Allgemeines zu logischem Schließen und Beweisen
- 2 Umgang mit Implikationen
- 3 Umgang mit Äquivalenzen
- 4 Umgang mit Und und Oder
- 5 Widerlegen
- 6 Umgang mit Quantoren

Abschnitt 1: Allgemeines zu logischem Schließen und Beweisen

Eine **logische Schlussregel** ist ein Prinzip der Gestalt „Aus den Aussagen X kann auf die Aussage Y geschlossen werden“.

Die Aussagen X heißen dabei die **Prämissen** der Schlussregel und die Aussage Y heißt ihre **Konklusion**.

Die Anwendung einer Schlussregel heißt **logische Schlussfolgerung** oder auch *deduktiver Schluss*.

Wäre ich reich, würde ich jeden Tag ins Restaurant gehen.
 A B

Ich gehe nicht jeden Tag ins Restaurant.
 $\neg B$

Also gilt: Ich bin nicht reich.
 $\neg A$

$$\begin{array}{r} A \rightarrow B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

Wenn der Fluxkompensator in Unwucht gerät,

A

misslingt der Chronosprung.

B

Der Chronosprung ist gelungen.

$\neg B$

Also gilt: Der Fluxkompensator ist nicht in Unwucht geraten.

$\neg A$

Wenn die Borussia heute gewinnt, ist sie Tabellenführer.

A

B

Die Borussia hat heute nicht gewonnen.

$\neg A$

Also gilt: Die Borussia ist nicht Tabellenführer.

$\neg B$

(x reelle Zahl)

$$\begin{array}{l} x \geq 2 \quad \rightarrow \quad x^2 \geq 4 \\ x < 2 \\ \hline x^2 < 4 \end{array}$$

Abschnitt 2: Umgang mit Implikationen

A, B Aussagen. Die Schlussregel *Modus ponens* lautet:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

Wenn ich Bürgermeister werde, kriegt jeder Freibier.
Ich wurde zum Bürgermeister gewählt.

Also gilt: Jeder bekommt Freibier ausgeschenkt.

Der direkte Beweis

A, B Aussagen.

Um zu beweisen, dass $A \rightarrow B$ gilt, kannst du einen **direkten Beweis** führen:

Nimm an, dass A gültig ist (dabei ist es egal, ob A „in Wahrheit“ wahr oder falsch ist) und beweise mithilfe dieser Annahme (und allen weiteren Aussagen, die dir zur Verfügung stehen), dass B gilt.

Gegeben	Zu zeigen
...	$A \rightarrow B$
...	
...	

\Rightarrow

Gegeben	Zu zeigen
...	B
...	
...	
A	



Satz

Falls es nächsten Sommer (schon wieder) zu wenig regnet, wird der Fichtenwald in meiner Heimatstadt gerodet werden.

Beweis Es gelte, dass es auch diesen Sommer wieder zu wenig regnet. Dann fehlt es den Fichten an Flüssigkeit, um ausreichend Harz für eine widerstandsfähige Rinde auszubilden. Dies erleichtert es Borkenkäfern, innerhalb der Rinde zu nisten, sodass sich die Borkenkäferpopulation im Wald stark vergrößert und Bäume teilweise absterben werden. Unter diesem Umstand wird die örtliche Forstbehörde beschließen, den Wald zum Schutz vor umstürzenden Bäumen und einer weiteren Ausbreitung der Borkenkäfer zu roden. ■

Direkter Beweis mit Zwischenschritten

Oft kannst du die Implikation $A \rightarrow B$ nicht unmittelbar direkt beweisen, sondern musst dich an **Zwischenschritten** entlanghangeln:


$$A \rightarrow Z_1$$

$$\rightarrow Z_2$$

$$\rightarrow Z_3$$

$$\rightarrow B$$

Nächstes Jahr regnet es zu wenig.

- Den Fichten fehlt es an Flüssigkeit, um ausreichend Harz für eine widerstandsfähige Rinde auszubilden.
 - Borkenkäfern wird es erleichtert, innerhalb der Rinde zu nisten.
 - Die Borkenkäferpopulation im Wald wird stark vergrößert und Bäume sterben teilweise ab.
 - Die örtliche Forstbehörde beschließt, den Wald zum Schutz vor umstürzenden Bäumen und einer weiteren Ausbreitung der Borkenkäfer zu roden.
- 

A, B Aussagen.

Die **Kontraposition** der Implikation $A \rightarrow B$ ist die Aussage $\neg B \rightarrow \neg A$.

„Wenn ich krank bin, bleibe ich zuhause.“

Kontraposition: „Wenn ich nicht zuhause bleibe, bin ich nicht krank.“

Der indirekte Beweis

A, B Aussagen.

Die Implikation $\neg B \rightarrow \neg A$ kannst du *indirekt* dadurch beweisen, dass du $A \rightarrow B$ beweist.

Man spricht auch von einem **Kontrapositionsbeweis**.

Satz

Seien m, n zwei natürliche Zahlen. Dann gilt:

$$m^2 > n^2 \quad \rightarrow \quad m > n$$

Beweis Ich führe einen indirekten Beweis. Dafür sei angenommen, dass $m \leq n$ gilt.

$$\xrightarrow{m \leq n} m^2 \leq mn$$

$$\xrightarrow{m \leq n} mn \leq n^2$$

$$\Rightarrow m^2 \leq mn \leq n^2$$

$$\Rightarrow m^2 \leq n^2$$



Abschnitt 3: Umgang mit Äquivalenzen

Schlussregeln, um Äquivalenzen zu verwenden

Für beliebige Aussagen A, B gibt es die folgenden Schlussregeln:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \quad \text{und} \quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

Man besteht die Prüfung genau dann,
wenn man mehr als 50 Punkte erreicht.

Falls ich mehr als 50 Punkte erreicht habe
hab ich die Prüfung bestanden.

Man besteht die Prüfung genau dann,
wenn man mehr als 50 Punkte erreicht.

Wenn ich die Prüfung bestanden habe,
hab ich über 50 Punkte geholt.

Gegeben	Zu zeigen
...	...
...	
$A \leftrightarrow B$	

 \implies

Gegeben	Zu zeigen
...	...
...	
$A \rightarrow B$	
$B \rightarrow A$	

A, B Aussagen.

Um die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ zu beweisen, kannst du deinen Beweis in einen **Hinrichtungsteil** und einen **Rückrichtungsteil** aufteilen:

„ \Rightarrow “: (Beweis für $A \rightarrow B$)

„ \Leftarrow “: (Beweis für $A \leftarrow B$)

Gegeben	Zu zeigen		Gegeben	Zu zeigen
...	$A \leftrightarrow B$	\Rightarrow	...	$A \rightarrow B$
...			...	$A \leftarrow B$
...			...	

Satz

Sei n eine natürliche Zahl. Genau dann ist n ein Vielfaches von 6, wenn n ein Vielfaches von 2 und ein Vielfaches von 3 ist.

Beweis „ \Rightarrow “: Sei n ein Vielfaches von 6. Also gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 6k$. Also ist

$$n = 6k = 2 \cdot (3k) \quad \text{und} \quad n = 6k = 3 \cdot (2k)$$

sodass n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3 ist.

„ \Leftarrow “: Sei n ein Vielfaches von 2 und ein Vielfaches von 3.

Beweis „ \Rightarrow “: Sei n ein Vielfaches von 6. Also gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 6k$. Also ist

$$n = 6k = 2 \cdot (3k) \quad \text{und} \quad n = 6k = 3 \cdot (2k)$$

sodass n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3 ist.

„ \Leftarrow “: Sei n ein Vielfaches von 2 und ein Vielfaches von 3. Dann gibt es natürliche Zahlen k, l mit

$$n = 2k \quad \text{und} \quad n = 3l$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} n &= (3 - 2) \cdot n \\ &= 3n - 2n \\ &= 3 \cdot 2k - 2 \cdot 3l && \text{(wegen } n = 2k \text{ und } n = 3l\text{)} \\ &= 6k - 6l \\ &= 6 \cdot (k - l) \end{aligned}$$

Also ist n ein Vielfaches von 6. ■

Abschnitt 4: Und und Oder

Seien A, B zwei Aussagen.

Gegeben	Zu zeigen		Gegeben	Zu zeigen
...	$A \wedge B$	\implies	...	A
...			...	B
...			...	

Seien A, B zwei Aussagen.

Gegeben	Zu zeigen
...	...
...	
$A \wedge B$	

 \implies

Gegeben	Zu zeigen
...	...
...	
A	
B	

Fallunterscheidung

Seien A, B, X drei Aussagen und es sei gegeben, dass $A \vee B$ gilt. Dann kannst du, um X zu beweisen, eine **Fallunterscheidung** durchführen:

- 1 Beweise $A \rightarrow X$, also dass X im Fall A gilt.
- 2 Beweise $B \rightarrow X$, also dass X im Fall B gilt.

Gegeben	Zu zeigen
...	X
...	
$A \vee B$	

 \implies

Gegeben	Zu zeigen
...	$A \rightarrow X$
...	$B \rightarrow X$

Satz

Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist $n^2 + n$ eine gerade Zahl.

Beweis Es ist $n^2 + n = n(n + 1)$. Bekanntlich ist jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade. Daher kann ich eine Fallunterscheidung durchführen:

- 1 n ist gerade. In diesem Fall ist $n(n + 1)$ als Vielfaches einer geraden Zahl ebenfalls eine gerade Zahl.
- 2 n ist ungerade. In diesem Fall ist $n + 1$ eine gerade Zahl, sodass $n(n + 1)$ als Vielfaches einer geraden Zahl ebenfalls eine gerade Zahl ist.

Also ist in jedem Fall $n(n + 1) = n^2 + n$ eine gerade Zahl. ■

Modus tollendo ponens

Seien A, B zwei Aussagen. Dann gibt es die Schlussregel:

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Ich werde meiner Freundin einen Erdbeerkuchen
oder einen Käsekuchen zum Geburtstag backen.
Ich konnte keine Erdbeeren mehr auftreiben.

Also gilt: Meine Freundin kriegt nen Käsekuchen.

Abschnitt 5: Widerlegen

Sei A eine Aussage.

Einen Beweis der Aussage $\neg A$ nennt man eine **Widerlegung** der Aussage A .

Indirekte Widerlegung

Sei A irgendeine Aussage.

Dann kannst du A *indirekt widerlegen*, indem du eine falsche Aussage B findest, die eine Konsequenz von A wäre.

$$\frac{\neg B \quad A \rightarrow B}{\neg A}$$

Gegeben	Zu zeigen		Gegeben	Zu zeigen
...	$\neg A$	\Rightarrow	...	$A \rightarrow B$
...			...	$\neg B$
...			...	

Satz

198 ist nicht durch 17 teilbar.

Beweis Es ist $11 \cdot 17 = 187$. Wäre 198 durch 17 teilbar, so auch die Differenz $198 - 187 = 11$. Aber 11 ist kein Vielfaches von 17. ■

$(17 \text{ teilt } 198) \rightarrow (17 \text{ teilt } 11)$

A

B

$17 \text{ teilt nicht } 11$

$\neg B$

$17 \text{ teilt nicht } 198$

$\neg A$

Ein **Widerspruch** ist eine Aussage der Gestalt

$$A \wedge \neg A$$

„Es ist Herbst und es ist nicht Herbst.“

Der Satz vom Widerspruch

Axiom

Für jede beliebige Aussage A gilt:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Mit anderen Worten: Jeder Widerspruch ist eine falsche Aussage.

Der Widerspruchsbeweis

Sei A eine Aussage.

Um die Aussage A zu widerlegen, kannst du einen **Widerspruchsbeweis** führen, indem du aus A einen Widerspruch herleitest.

Satz

Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl.

Beweis Ich führe einen Widerspruchsbeweis. Dazu sei angenommen, es gebe eine kleinste positive reelle Zahl x . Da x positiv ist, wäre auch $\frac{x}{2}$ eine positive reelle Zahl. Ferner wäre $\frac{x}{2} < x$. Aber dies widerspräche der Annahme, dass x die kleinste positive reelle Zahl sei. ■

Abschnitt 6: Umgang mit Quantoren

Beweis per Beispiel

Sei E eine Eigenschaft.

Die Existenzaussage $\exists x : E(x)$ kannst du durch Angabe eines **Beispiels** beweisen, indem du ein konkretes Objekt findest, von dem du nachweist, dass es die Eigenschaft E besitzt.

Satz

Es gibt eine natürliche Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.

Beweis Betrachte die Zahl 28. Deren echte Teiler sind

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 14$$

Und es ist

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$



Allaussagen beweisen

Sei E eine Eigenschaft.

Die Allaussage $\forall x : E(x)$ kannst du folgendermaßen beweisen:

Führe eine neue Variable a ein, die ein „beliebiges Objekt“ bezeichnen soll, und beweise, dass a die Eigenschaft E besitzt.

„Sei a beliebig.“

Gegeben	Zu zeigen	\implies	Gegeben	Zu zeigen
...	$\forall x : E(x)$...	$E(a)$
...			...	
...			„ a ist ein beliebiges Objekt.“	

Manche schreiben auch:
 „Sei a beliebig aber fest.“

Satz (Satz von Euklid)

Für jede natürliche Zahl n existiert eine Primzahl p , die größer als n ist.

Gegeben		Zu zeigen
<hr/>		
		\forall (natürliche Zahl) \exists (Primzahl) : ...
\implies		
Gegeben		Zu zeigen
<hr/>		
„Sei n eine beliebige natürliche Zahl.“		\exists (Primzahl) : ...

Beweis Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Satz (Satz von Euklid)

Für jede natürliche Zahl n existiert eine Primzahl p , die größer als n ist.

Beweis Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die $\leq n$ sind, gibt es auch nur endlich viele Primzahlen, die $\leq n$ sind. Seien k deren Anzahl und p_1, \dots, p_k diese Primzahlen. Betrachte die Zahl

$$N := p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

(wobei $N := 2$ im Fall $k = 0$ sei). Dann lässt N bei der Division durch p_1, \dots, p_k jedes Mal den Rest Eins übrig, ist also nicht durch p_1, \dots, p_k teilbar. Wegen $N \geq 2$ muss N gemäß dem Fundamentalsatz der Arithmetik aber mindestens einen Primteiler P besitzen. Da P keines der p_1, \dots, p_k sein kann, aber die p_1, \dots, p_k alle Primzahlen sind, die $\leq n$ sind, muss P größer als n sein. ■

Sei E eine Eigenschaft.

$\underbrace{\exists x : E(x)}$
Es gibt mindestens ein...

$\wedge \underbrace{\forall y, z : (E(y) \wedge E(z)) \rightarrow y = z}$
Es gibt höchstens ein...

Um die Aussage $\exists!x : E(x)$ zu beweisen, kannst du deinen Beweis in einen Existenz-Teil und einen Eindeutigkeit-Teil aufteilen:

- (Existenz): Es gibt mindestens ein Objekt, das die Eigenschaft E besitzt.
- (Eindeutigkeit): Je zwei Objekte, die die Eigenschaft E besitzen, sind identisch.

Satz

Es gibt genau eine reelle Zahl x , die für jede reelle Zahl y die Gleichung $x \cdot y = x$ erfüllt.

Beweis (Existenz): Da für jede reelle Zahl y gilt, dass $0 \cdot y = 0$, erfüllt die Zahl 0 die gewünschte Eigenschaft.

(Eindeutigkeit): Seien a, b zwei reelle Zahlen, sodass für jede reelle Zahl y gilt, dass $ay = a$ und $by = b$. Nun ist

$$\begin{aligned} a &= a \cdot b && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } a \text{)} \\ &= b \cdot a \\ &= b && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } b \text{)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quantorennegationsregeln

Sei E eine beliebige Eigenschaft. Dann gilt:

$$\neg(\exists x : E(x)) \leftrightarrow \forall x : \neg E(x)$$

$$\neg(\forall x : E(x)) \leftrightarrow \exists x : \neg E(x)$$

Vorsicht: Im Allgemeinen ist

$$\neg(\forall x : E(x)) \not\leftrightarrow \forall x : \neg E(x)$$

Merke:

$$\neg\exists \leftrightarrow \forall\neg$$

$$\neg\forall \leftrightarrow \exists\neg$$

Widerlegung per Gegenbeispiel

Du kannst die Allaussage $\forall x : E(x)$ durch ein **Gegenbeispiel** widerlegen, indem du ein Objekt a findest, von dem du nachweist, dass es die Eigenschaft E nicht besitzt.

$$\neg(\forall x : E(x)) \quad \leftrightarrow \quad \exists x : \neg E(x)$$

Satz

Nicht jedes Lehrbuch zur Linearen Algebra ist schlecht geschrieben.

Beweis Ein Gegenbeispiel ist das Lehrbuch von Kowlasky/Michler. Das find ich eigentlich voll ok. ■

<https://katalog.ub.uni-heidelberg.de/cgi-bin/titel.cgi?katkey=65661101>

Ende