§4 Abbildungen

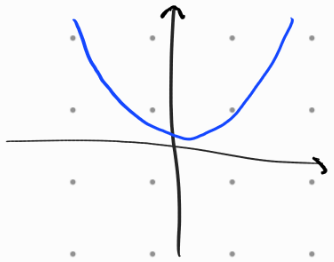
<u>Def</u> Abbildung von einer Menge X nach Y ist die Abstraktion einer Abbildungsvorschrift die jeden $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. $f: X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$

$$x \mapsto f(x)$$

X Definitionsbereich , Y Wertebereich

$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

$\mathrm{Graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$



<u>Bsp</u> $f: \{\text{Katzen}\} \to \{\text{Farben}\}$, $K \mapsto$ „Fellfarbe von K"

$\{\cdot\}: X \to \mathcal{P}(X)$, $\underset{\underset{X}{\cap}}{x} \mapsto \underset{\underset{\mathcal{P}(X)}{\cap}}{\{x\}}$, $1 \neq \{1\}$

<u>Axiom 4.1.2</u> (Gleichheit von Abb)

$f, g: X \to Y$ $\quad f = g \Leftrightarrow \forall x \in X: f(x) = g(x)$

<u>Bsp</u> 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+1$

$f \neq g$ da $f(1) = 1 \neq 3 = g(1)$

2) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)(x-1)$, $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$

<u>Bew</u> dass $\alpha = \beta$. Sei $x \in X$. $\alpha(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1 = \beta(x)$. $\Rightarrow \alpha = \beta$.

<u>Bem</u> • $x \mapsto x^2$ ist <u>keine</u> Abb!

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

• $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2xy + xy^2$

$\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z,w,u) \mapsto \ldots$

4.2 Verkettung

Def Seien X, Y, Z Mengen, $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$, dann sei $g \circ f$ die Abbildung $X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$

$\circ : \mathrm{Abb}(Y,Z) \times \mathrm{Abb}(X,Y) \to \mathrm{Abb}(X,Z)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bsp 1) $S := \{$Schauspieler$\}$, $F := \{$Filme$\}$

$f : S \to F$, $s \mapsto$ „den ersten Film in dem s mitgespielt hat"

$g : F \to \mathbb{N}$, $x \mapsto$ „das Erscheinungsjahr von x"

$(g \circ f)(s) =$ „Erscheinungsjahr des ersten Films von s"

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$

$$\left.\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 \end{array}\right\} \text{z.B. } (g \circ f)(4) \neq (f \circ g)(4) \Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$$

Satz Gelte $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Dann gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

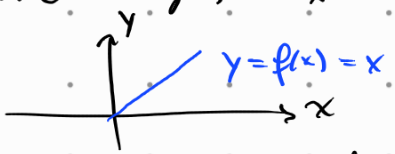
Bew Sei $a \in A$. Dann ist

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(\underbrace{f(a)}_{=:y})) = (h \circ g)(y) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$$

4.3 Identität

Def Sei X eine Menge, $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$

Bsp $X = \mathbb{R}$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, $f(x) = x$

Satz Seien X, Y Mengen, $X \xrightarrow{f} Y$. Dann gilt

$f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_Y \circ f = f$

Beweis Sei $x \in X$.

$(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x)$

$(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x)$.

Def Sei X eine Menge, $A \subseteq X$, Y eine Menge,
Dann ist die Einschränkung der Funktion $X \xrightarrow{f} Y,\ x \mapsto f(x)$
die Funktion $A \xrightarrow{f} Y,\ a \mapsto f(a)$
Notation $f|_A$

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2$ $\quad$ $0 \in \operatorname{im}(f) = \operatorname{Bild}(f)$ denn $f(\sqrt{2}) = 0$
$f|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2$ $\quad$ aber $0 \notin \operatorname{im}(f|_{\mathbb{Q}})$ da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Def Inklusionsabbildung
X Menge, $A \subseteq X$
$\iota_A: A \to X,\ x \in A \mapsto x \in X$ $\quad \Rightarrow \iota_A = \mathrm{id}_X|_A$

Bsp $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\iota_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x$
X eine Menge, $\emptyset \subseteq X$ $\quad \iota_{\emptyset}: \emptyset \to X$

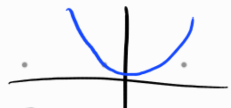
4.6 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def X, Y Mengen, $X \xrightarrow{f} Y$ f heißt injektiv falls eine der äq Bed erfüllt ist
(i) Für alle $a, b \in X$: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
(ii) Für alle $a, b \in X$: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
(iii) Für alle $y \in Y$ ex. <u>höchstens</u> ein $x \in X$: $f(x) = y$

$\Rightarrow$ nicht inj.!

Bsp 1) $U \subseteq X$, $\iota_U: U \to X,\ x \mapsto x$ inj.
2) $\{\circ\}: X \to \mathcal{P}(X),\ x \mapsto \{x\}$ inj. denn wenn $\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$
3) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^2 - 2n$ nicht inj. da $f(0) = f(2)$

Def Surjektivität $X \xrightarrow{f} Y$, f heißt surjektiv falls eine der äq Bed
(i) $\operatorname{im}(f) = Y$ $\quad$ $\operatorname{im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X: f(x) = y\}$
(ii) Für jedes $y \in Y$ ex <u>mind.</u> ein $x \in X$: $f(x) = y$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

Bsp 1) $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n+1$ nicht surj. da $0 \notin \operatorname{im}(f)$

2) $g: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto \begin{cases} n-1, & n \geq 1 \\ 0, & n=0 \end{cases}$ surj. aber nicht inj.
da $n = g(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

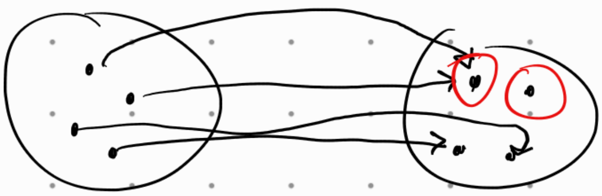
Hilbert Hotel

<u>Def</u> Bijektivität $X \xrightarrow{f} Y$ heißt bijektiv falls sie inj. & surj.
Dies ist äq dazu dass für jedes $y \in Y$ <u>genau ein</u> $x \in X$: $f(x) = y$

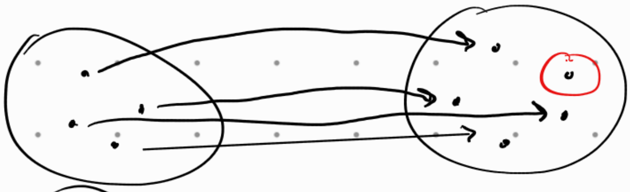
<u>Bsp</u> $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ → weder inj. noch surj.
$f_2: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ → inj. aber nicht surj.
$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$ → surj. aber nicht inj.
$f_4: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$ → bij. also surj. & inj.

<u>Bem</u> injektive Abb. schreibt man $X \hookrightarrow Y$
surj. Abb $X \twoheadrightarrow Y$

$X \xrightarrow{f} Y$

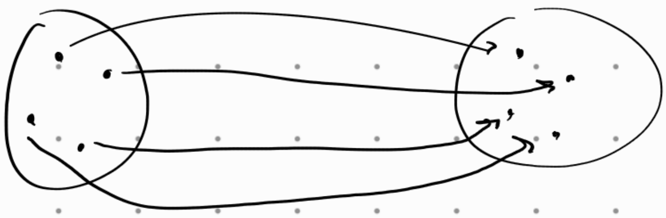


weder inj. noch surj.



inj. und nicht surj.

surj. und nicht inj.



bij. $\Leftrightarrow$ surj. & inj.

4.7 Invertierbare Abb.

$f: X \to Y$, $g: Y \to X$ dann heißt

g rechtsinvers zu f falls $f \circ g = id_Y$

g linksinvers zu f falls $g \circ f = id_X$

g Umkehrabb. von f falls g rechts- & linksinvers ist, also

$f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$

In diesem Fall schreiben wir $g = f^{-1}$ und nennen f invertierbar

Bsp $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$ hat Umkehrabb. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n-1$

Sei $n \in \mathbb{Z}$: $(f \circ g)(n) = f(n-1) = n-1+1 = n \Rightarrow f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$

$(g \circ f)(n) = g(n+1) = n+1-1 = n \Rightarrow g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow g = f^{-1}$

Satz Wenn f invertierbar ist, ist die Umkehrabb. eindeutig.

Bew Seien g, h Umkehrabb. von f. $f: X \to Y$, $g, h: Y \to X$

$g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$

$\Rightarrow g = h$